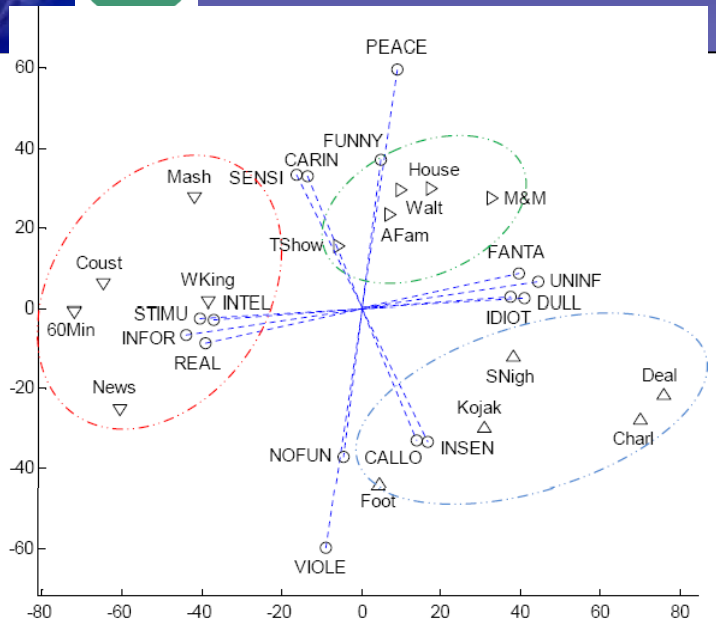


BIG DATA

Parte I (borra)

Modelli statistici di dipendenza

- ART ROBOTIQUE
- Shiro Takatani —3D Water Matrix https://www.youtube.com/watch?v=Q-zysog6nY0

Le Smart City

Singapore
Ogni attività è monitorata da sensori

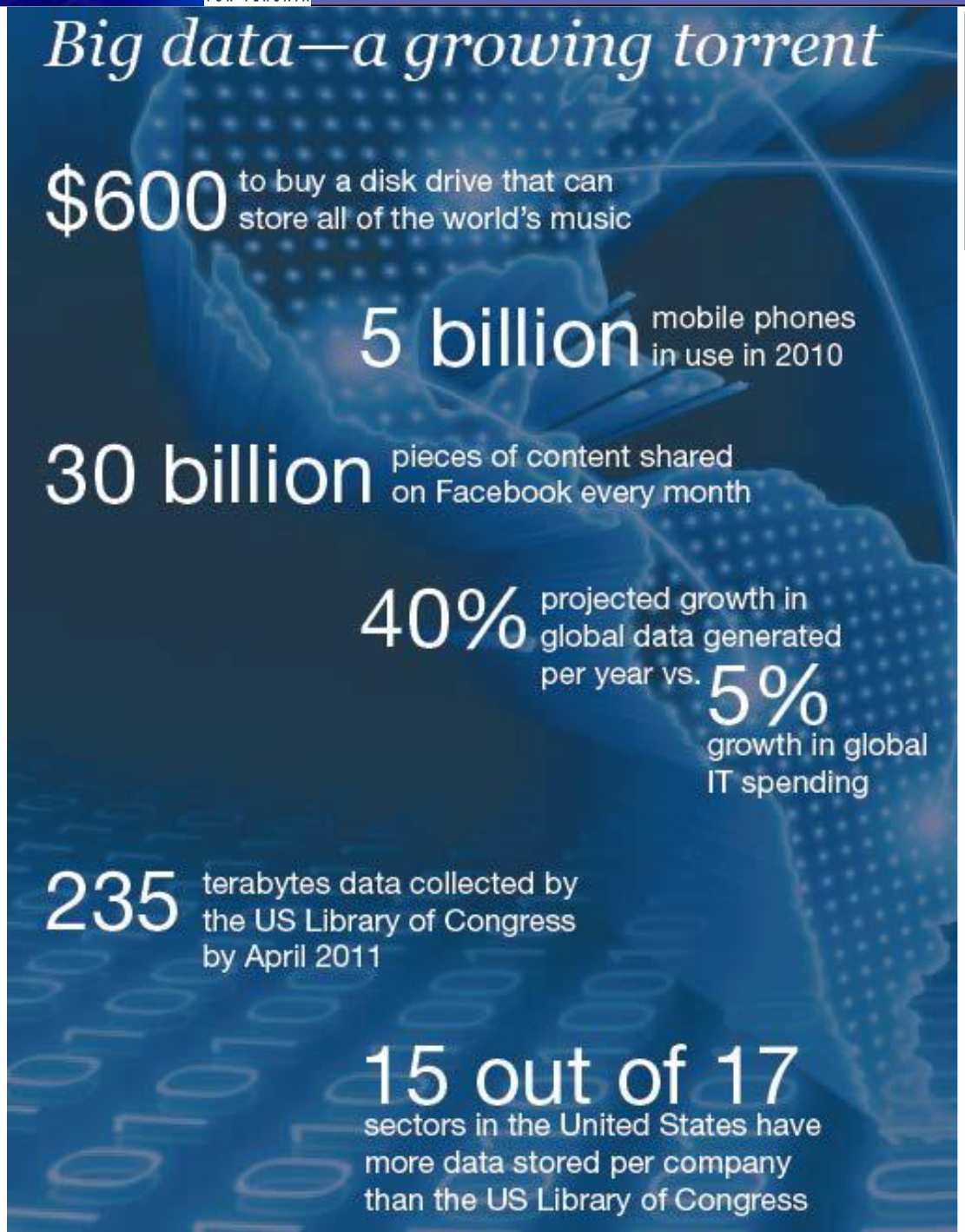
San Francisco
Con la più alta concentrazione di luci Led. Il 15% di un edificio deve avere pannelli solari

New York
Sidewalk Laps; Postazioni che servono da wifi, carica batterie, informazioni

Montreal
App per gli spazzaneve, che permette di tracciare i percorsi e le tempistiche degli spazzaneve.

Data Revolution

progetto delle nazioni unite per suggerire politiche verso la digitalizzazione
http://www.undatarevolution.org/report/



$5 million vs. $400

Price of the fastest supercomputer in 1975[1] and an iPhone 4 with equal performance

Incremento di dati e di sistemi di elaborazione

Cosa accade in 60 secondi

Quali siti web utilizziamo su internet?

La tripla V: Volume; Velocità e Varietà

La tripla V: Volume; Velocità e Varietà

Volume: comporta nuovi sistemi di gestione di memoria (cloud), di elaborazione (sistemi di macchine virtuali)
Varietà: differenti tipologie di dati e gradi di struttura; curse of dimensionality
Velocità: processi real-time dettati dal tasso di raccolta delle informazioni

Ma anche…..
Veracity: necessità di utilizzare dati puliti
Variability
Venue (locazione)
Vocabulary (semantica)

	Big data	Analytics tradizionale
Tipologia dei dati	Non strutturati	Ordinati per righe e colonne
Volume dei dati	Da cento terabyte ai petabyte	Decine di terabyte (o meno)
Flusso dei dati	Flusso costante di dati	Pool statistico di dati
Metodi di analisi	Machine learning	Per ipotesi
Scopo principale	Prodotti data based	Servizi, supporto alle decisioni

Fonte: Davenport T. Big data @l Lavoro. Milano: Franco Angeli Edizioni, 2015.

Esigenze scientifiche sorte dalla disponibilità di Big Data

- **Necessità di avanzamenti teorici matematici/statistici per provvedere a un nuovo linguaggio e strumenti per nuove metodologie di inferenza:**

Esempi: Machine Learning; Vapnik dimension; Metodi di Bootstrap;…

- **Necessità di algoritmi avanzati capaci di trattare grosse moli di dati con struttura complessa**

- **Necessità di strumenti di Visualizzazione (Analytics)**

- **Citizen Science (**attività scientifica condotta da membri del pubblico indistinto in collaborazione con scienziati o sotto la direzione di scienziati professionisti e istituzioni scientifiche: *Passive sensing*; *Volunteer Thinking*; *Osservazioni ambientali ed ecologiche*; *Rilevazioni partecipate*; *Scienza civica e di comunità*)

Big Data ⇒ Data Mining ⇒ Data Driven Discovery

Apprendimento Non Supervisionato

Insieme di variabili tutte con lo stesso ruolo

Data Reduction

- **Class Discovery - Clustering**
  Si distinguono diverse classi di comportamento o diversi tipi di oggetti
  Si trovano nuove classi di comportamento o nuovi tipi di oggetti
  Si descrive una immensa raccolta di dati con un numero limitato di rappresentazioni sintetiche
- **Principal Component Analysis**
  Si cercano delle Variabili che sintetizzano le diverse variabili osservate
  Generano descrizioni a bassa dimensionalità degli eventi e dei comportamenti, si evidenziano le correlazioni e le dipendenze; risolvono il problema della curse of dimensionality

Outlyers detection (anomalie/deviazioni/nuove scoperte/….)

Si cercano eventi rari; si cercano eventi che escono fuori dal range atteso; si evidenziano «sozzerie» o dati realmente estremi; si puliscono i dati

Link Analysis- Association Analysis – Network Analysis

Identificazione di connessioni tra diversi eventi o oggetti; Ricerca di compresenza tra valori di diverse variabili; Oggetti che hanno molto meno di 6 gradi di separazione

Big Data ⇒ Data Mining ⇒ Data Driven Discovery

Apprendimento Supervisionato

Insieme di variabili con diverso ruolo:

Dipendenti/Target/Outputs

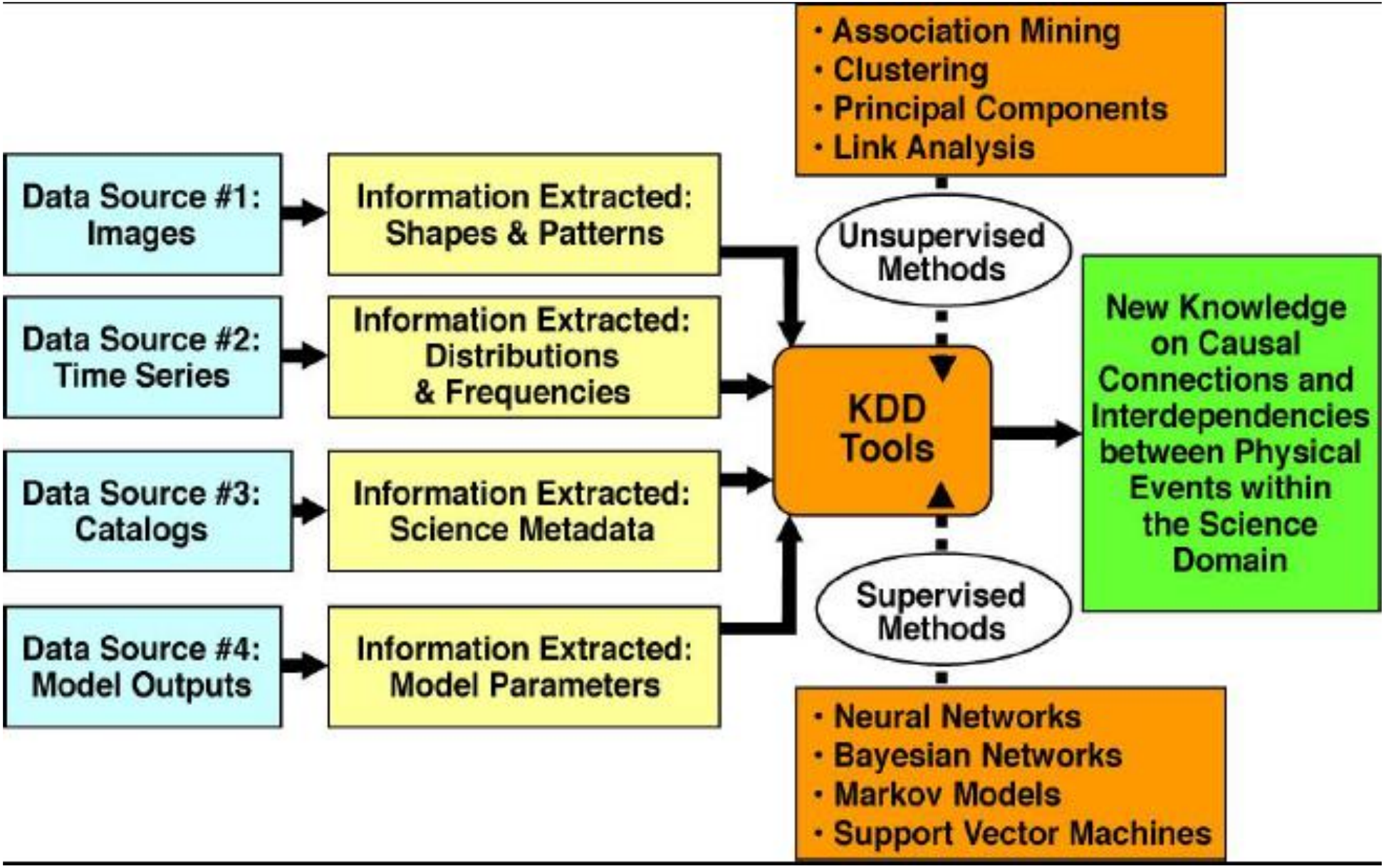
⇑

Indipendenti/Esplicative/Predictors/Inputs

Metodi di Regressione: Variabile dipendente Quantitativa

Metodi di Classificazione: Variabile dipendente Qualitativa

Regressione lineare e non lineare; Decision Trees; Neural Networks; Support Vector Machine; Sentiment Analysis; Pattern Recognition; ecc.


Data Source #1: Images
Data Source #2: Time Series
Data Source #3: Catalogs
Data Source #4: Model Outputs
Information Extracted: Shapes & Patterns
Information Extracted: Distributions & Frequencies
Information Extracted: Science Metadata
Information Extracted: Model Parameters
KDD Tools
Unsupervised Methods
Supervised Methods
• Association Mining
• Clustering
• Principal Components
• Link Analysis
• Neural Networks
• Bayesian Networks
• Markov Models
• Support Vector Machines
New Knowledge on Causal Connections and Interdependencies between Physical Events within the Science Domain

Lavorare sui Big Data può essere davvero complesso a causa:

- delle diverse tipologie di dati (numerici, video, testuali, immagini, audio, ecc.)
- del numero elevato di variabili
- della mancanza di ipotesi a priori sulle relazioni tra le variabili

D’altra parte la grossa mole di dati permette

- di evidenziare situazioni molto rare
- si possono utilizzare strumenti più semplici dei veri e propri modelli

Quando si analizzano i Big Dati si può incorrere facilmente nel rischio di scoprire associazioni senza senso: al crescere dei dati aumenta la possibilità di trovare relazioni senza senso.

Come si procede:

- Si estrae un campione dal dataset, in questo modo si riduce la base dati rendendo più veloce il processo di analisi senza però inficiare sulla bontà dell'analisi
- Trovare elementi simili tra i dati
- Aggiornamento incrementale dei modelli
- Algebra lineare distribuita per il trattamento di grandi matrici sparse

Negli ultimi decenni la statistica ha modificato i sui paradigmi inferenziali, sfruttando le incredibili potenzialità di calcolo e l'incredibile aumento di dati.

Da modelli statistici parametrici a modelli non parametrici

Nell'inferenza classica si fanno delle assunzioni di tipo probabilistico sul processo di generazione dei dati, nell'approccio moderno non si fanno assunzioni (ad esempio: dalla regressione lineare alle spline regression)

Da modelli lineari a modelli non lineari

Nell'approccio classico si prediligono modelli lineari nei parametri; in quello moderno ci si sposta a modelli non lineari (ad esempio, dal modello di regressione lineare alle reti neuronali)

Da approcci di stima globale ad approcci di stima locale

Nel primo caso la funzione di regressione viene stimata considerando tutto lo spazio delle osservazioni; nel secondo caso la funzione viene stimata localmente (ad esempio, da modello logistico al classification tree)

Da modelli statistici esplicativi a modelli di previsione

Ci si è spostati più nell'ottica di modelli che servono a prevedere bene il fenomeno sotto studio, piuttosto che modelli che spiegano il ruolo delle variabili ma che hanno una bassa capacità di previsione (ad esempio, dalla bontà di adattamento del modello ai dati osservati, alla capacità del modello di prevedere i valori di nuove osservazioni)

Da modelli singoli a modelli aggregati

Si passa dalla stima di un singolo modello alla stima di un modello ottenuto come aggregazione di singoli modelli. (ad esempio, bagging, forest trees, boosting, gradient boosting)

Da approcci di inferenza classica a metodi di inferenza moderni

Si utilizzano approcci inferenziali basati sul ricampionamento (ad esempio, bootstrap, metodo monte carlo, Gibbs sampling, …)

Da modelli a capacità finita di trattenere informazione a modelli con capacità infinita

I modelli classici parametrici hanno una limitata capacità nel «memorizzare» l'informazione dei dati, gli approcci modelli sono progettati per poter contenere una mole illimitata di informazioni (ad esempio, le reti neuronali sono modelli capaci di apprendere quantità di informazione illimitata)

Metodi di Data Reduction

Si sono sviluppati tecniche per ridurre/sintetizzare l'informazione contenuta nei dati: riduzione del numero delle unità statistiche (ad es. Cluster Analysis); riduzione del numero delle veriabili (ad es. Analisi delle componenti principali)

Da campioni di unità indipendenti a campioni di unità dipendenti

Sempre più si collezionano dati che riguardano le relazioni tra unità statistiche e si vuole analizzare la loro associazione (ad esempio, link analysis, Network Analysis)

Da tecniche capaci di analizzare dati quantitativi a tecniche capaci di analizzare dati di altro tipo (immagini, video, testi)

Si sono sviluppati strumenti di analisi utili ad analizzare dati testuali (Text Mining, Sentiment Analysis); immagini (neural network; deep learning)

Metodi di Data Reduction

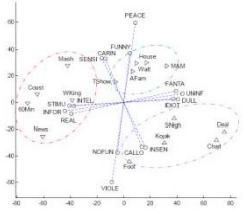
Si sono sviluppati tecniche per ridurre/sintetizzare l'informazione contenuta nei dati: riduzione del numero delle unità statistiche (ad es. Cluster Analysis); riduzione del numero delle veriabili (ad es. Analisi delle componenti principali)

Da campioni di unità indipendenti a campioni di unità dipendenti

Sempre più si collezionano dati che riguardano le relazioni tra unità statistiche e si vuole analizzare la loro associazione (ad esempio, link analysis, Network Analysis)

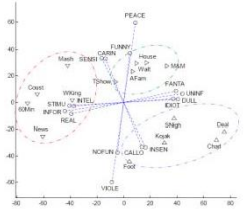
Modelli statistici di dipendenza

- **Modelli**: strutture formali che hanno l'obiettivo di descrivere, spiegare e comprendere (semplificando) fenomeni complessi.
- Si parla di **modelli statistici** quando la formalizzazione si basa sull'utilizzo di metodi e strumenti tipici della scienza matematica.
- Nei modelli statistici si accetta a priori che possa esistere un certo grado di **imprecisione** e di **incertezza.**
- In un modello statistico si cerca di stimare il grado di incertezza e di descriverlo mediante opportune strutture matematiche: le ***variabili casuali***.



Modelli statistici di dipendenza

- L'obiettivo di un modello statistico di analisi della dipendenza è quello di studiare come varia una determinata variabile Y (detta dipendente o risposta), in funzione del variare di alcune variabili X_1, …, X_k (dette indipendenti o esplicative).
- Esempio: Y = prezzo di vendita di un appartamento, X = superficie dell'appartamento.
- Esempio: Y = mi piace/non mi piace fare acquisti nel supermercato ABC, X = ritengo/non ritengo che il supermercato ABC abbia una buona varietà di prodotti.
- Esempio: Y = l'individuo è assunto/non è assunto dopo lo stage, X = punteggio al test di ammissione allo stage.



Modelli statistici di dipendenza

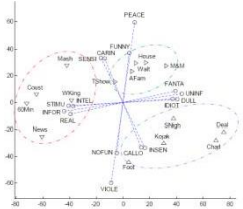
- Un modello statistico di dipendenza è rappresentato dalla funzione di densità/probabilità condizionata:

$$f(y|x_1, \ldots, x_k)$$

dove:

  - y = variabile dipendente o risposta;
  - $x_1, \ldots, x_k$ = variabili indipendenti o esplicative.

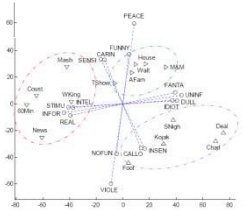
- Condizionatamente ai valori delle variabili esplicative, la variabile risposta rimane comunque una variabile aleatoria $\Rightarrow$ le X non determinano completamente la Y.



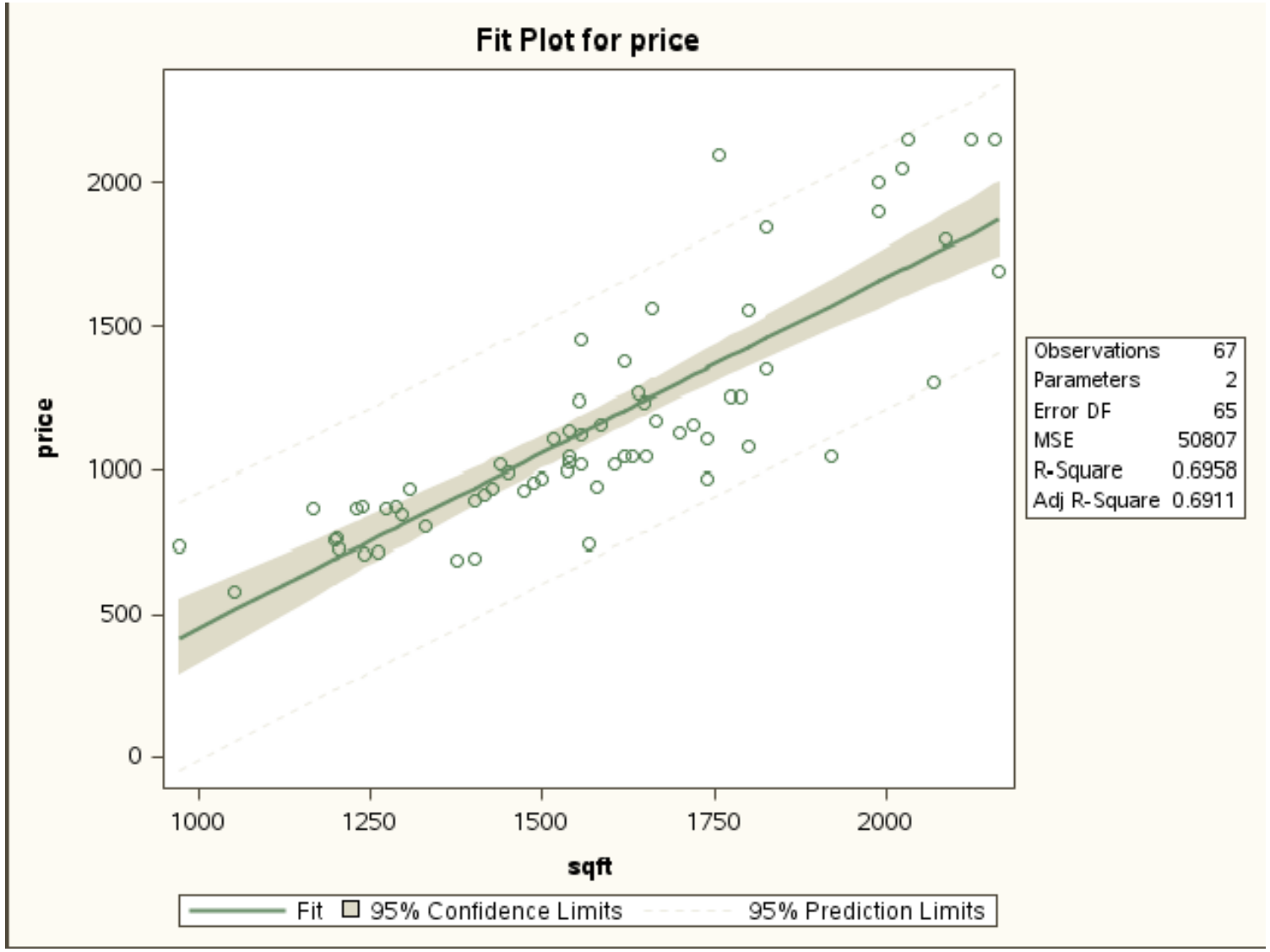
Modelli statistici di dipendenza

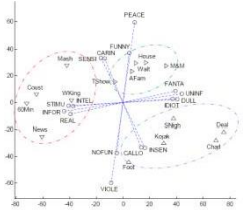
Il processo di formulazione di un modello può essere scomposto nei seguenti passaggi logici:

1. Posizione del problema
2. Scelta della classe di modelli
3. Scelta delle variabili e rilevazione dei dati
4. Selezione del modello
5. Stima dei parametri incogniti
6. Analisi della “bontà” del modello.
7. Utilizzo operativo:
    1. Analisi del fenomeno
    2. Previsioni
    3. Scenari



Esempio: Prezzo su superficie





Classificazione Modelli

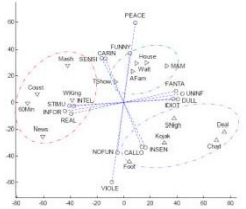
Modelli per tipo di rilevazione del campione

Il campione può essere rilevato in più modi:

1. le variabili sono rilevate su *n* unità distinte, in un certo istante temporale
2. le variabili sono rilevate in *T* diversi istanti temporali, ma riferite sempre alle medesime grandezze
3. le variabili sono rilevate in *T* diversi istanti temporali sulle stesse *n* unità

Abbiamo quindi modelli:

1. sezionali o cross section
2. per serie storiche o time series
3. per osservazioni ripetute o panel data



Regressione lineare (reg)

- Il modello di regressione lineare semplice è così formalizzato:

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + w_i$$

dove:

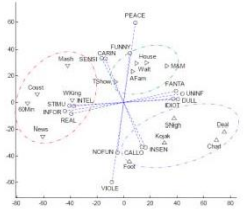
y_i = variabile dipendente o risposta;

x_i = variabile indipendente o esplicativa;

b , b = parametri incogniti (intercetta e coefficiente di regressione);

w_i = termine di errore (o disturbo).

- Il termine $\mathbf{w_i}$ deve presentare i seguenti requisiti:
  - distribuito in modo normale;
  - a media zero;
  - omoschedastico (varianza costante indipendente dalla variabile *x*);
  - osservazioni indipendenti.

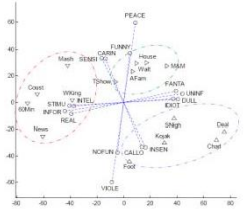


reg: interpretazione

- $\mathbf{E(y_i \mid x_i)} = \mu_i = \boldsymbol{b_0} + \boldsymbol{b_1}\mathbf{x_i}$, la relazione lineare è vera in media
- $\boldsymbol{b_0} = \mathbf{E(y_i \mid x_i = 0)}$, rappresenta l'influenza di variabili omesse che non variano con ***i***
- $\boldsymbol{b_1}$ incremento di μ_i corrispondente ad un aumento di una unità di $\mathbf{x_i}$
- $\mathbf{w_i}$ incorpora variabili omesse ed imperfezioni della relazione lineare che intercorre tra $\mathbf{y_i}$ e $\mathbf{x_i}$
- Il modello può anche essere formulato come

Equazione	*Assunzioni*
$E(y_i \mid x_i) = \mu_i = b_0 + b_1 x_i$	$y_i \mid x_i \sim N(\mu_i, \sigma_w^2)$, indip.

Quindi $f(y_i \mid x_i)$ è una normale con media dipendente da x_i



reg: stima puntuale

- (metodo dei minimi quadrati) le stime di $\boldsymbol{b_0}$ e $\boldsymbol{b_1}$ sono calcolate minimizzando

$$\Sigma_i (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2$$

in questo modo otteniamo

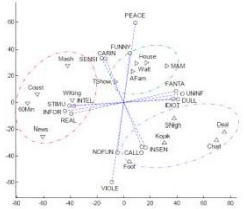
$$\hat{b}_1 = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}; \hat{b}_0 = \overline{Y} - \hat{b}_1 \overline{X}$$

- la varianza dell'errore è stimata come

$$\hat{\sigma}_w^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

- sono stimatori corretti ed efficienti nella classe degli stimatori lineari (nei dati) e corretti

$$E(\hat{b}_0) = b_0, E(\hat{b}_1) = b_1, E(\hat{\sigma}_w^2) = \sigma_w^2$$

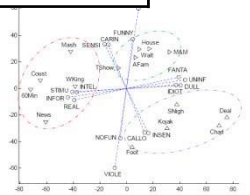


reg: esempio – prezzo su superficie (sqft)

Analysis of Variance					
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	7551970	7551970	148.64	<.0001
Error	65	3302439	50807		
Corrected Total					

Root MSE	225.40352	R-Square	0.6958
Dependent Mean	1161.4627	Adj R-Sq	0.6911
Coeff Var	19.40687		

Parameter Estimates							
Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t	95% Confidence Limits	
Intercept	1	-758.78383	159.89171	-4.75	<.0001	-1078.10963	-439.458
sqft	1	1.21372	0.09955	12.19	<.0001	1.0149	1.41254



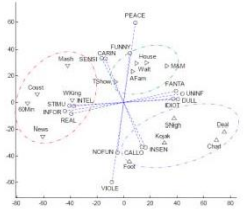
reg: bontà di adattamento

- **SSModel =** $\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$
- **SSResidual =** $\sum_{i=1}^{n}(y_i \quad \hat{y}_i)^2$
- **SSTotal =** $\sum_{i=1}^{n}(y_i \quad \bar{y})^2$

SST = SSM+SSR

Il coefficiente di determinazione è una misura della bontà di adattamento del modello ai dati ed è costruito come **R^2 = SSM/SST = 1 – SSR/SST**.

Ha sempre un valore compreso tra 0 e 1.



- Ipotesi nulla H_0: $b_1=0$
- Statistica test

$$t_{oss} = \text{Coef.}/(\text{Std. Err.}) = \hat{b}_1/se(\hat{b}_1),$$

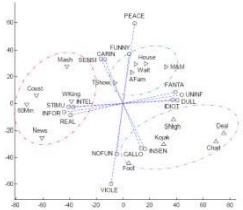
$$t_{oss} \sim T_{n-p-1} \text{ se } H_0 \text{ vera}$$

- regola di rifiuto basata sulla statistica test

$$|t_{oss}| > t_{\alpha/2}$$

- p-value

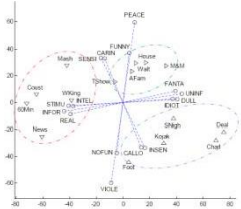
$$\text{p-value} = 2\Pr\{T_{n-p-1} > |t_{oss}|\}$$



- Se il modello è vero, l'ipotesi nulla H_0: b_1=0 equivale ad affermare che non vi è legame tra X e Y.

- regola di rifiuto basata sul p-value (sempre valida)

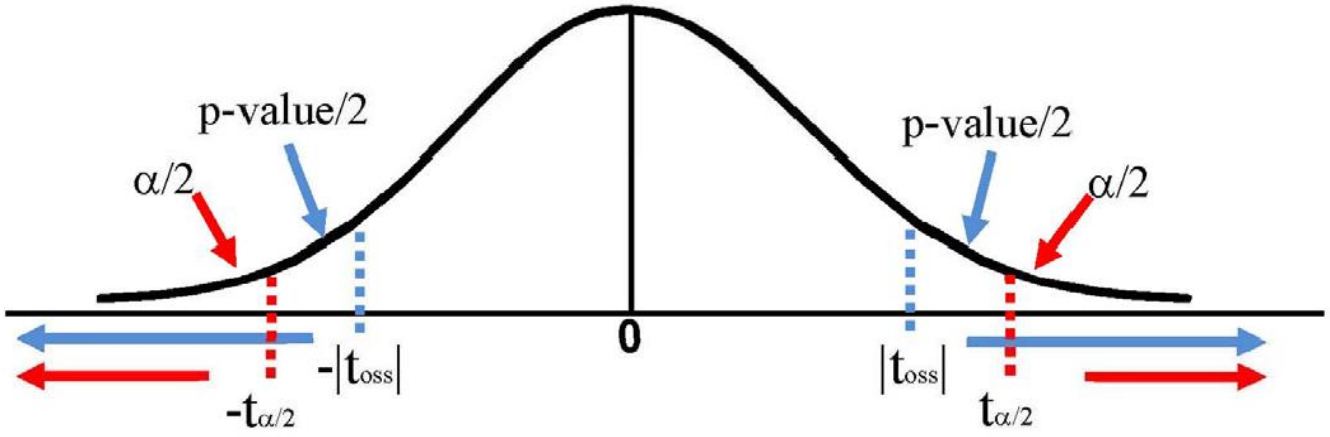
$$\text{p-value} < \alpha$$



P-value: Accetto H_0 al livello α

$|toss| < t\alpha/2$

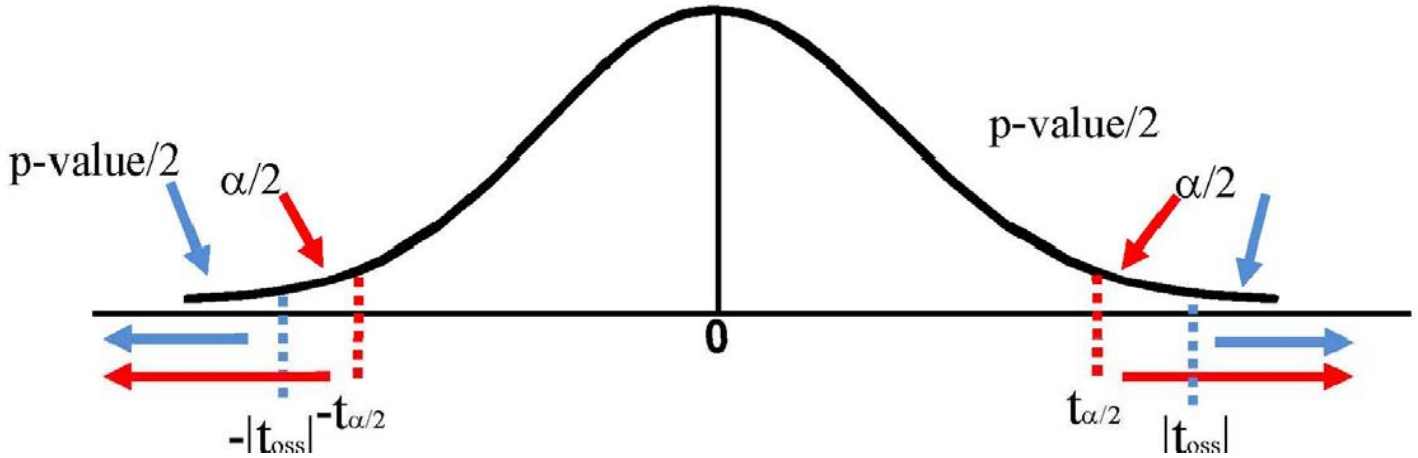
$p\text{-value} > \alpha$

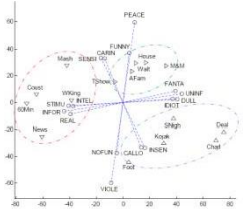


P-value: Rifiuto H_0 al livello α

$|toss| > t\alpha/2$

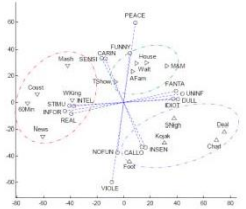
p-value $< \alpha$





Y binaria: Logit e Probit

- In alcuni casi la variabile dipendente è di natura binaria ed assume solo i due valori 0 o 1. Questi sono generalmente il risultato di una codifica.
- Esempi:
  - pazienti di una patologia potrebbero reagire o meno ad una terapia innovativa;
  - in un test aziendale per una promozione interna alcuni impiegati potrebbero superare la prova e altri no;
  - dopo un periodo di prova alcuni possono essere assunti e altri no.

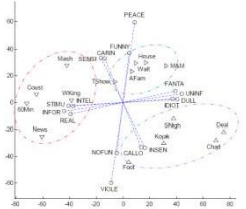


Regressione logit

Ad esempio potremmo essere interessati a capire se per un cliente è importante che in un supermercato ci sia una sufficiente varietà di prodotti.

Has a sufficient choice of brands/types/sizes of products * Shopping there makes me feel good Crosstabulation

			Shopping there makes me feel good		
			No	Yes	Total
Has a sufficient choice of brands/types/sizes of products	No	Count	90	38	128
			70.3%	29.7%	100.0%
	Yes	Count	92	140	232
			39.7%	60.3%	100.0%
Total		Count	182	178	360
			50.6%	49.4%	100.0%



logit: variabile riposta

Variabile aleatoria di Bernoulli

Distribuzione

y	$p(y)$
0	$1-\vartheta$
1	ϑ

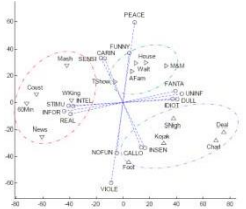
Caratteristiche

$$E(y) = \vartheta$$

$$V(y) = \vartheta(1-\vartheta)$$

Importante osservare che:

- la particolare codifica adottata ci permette di interpretare la probabilità come una media;
- la varianza dipende dalla media.



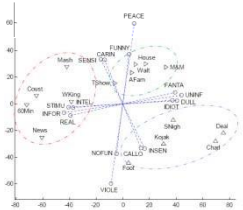
logit

Possiamo utilizzare il modello lineare

$$E(y_i \mid x_i) = \mu_i = b_0 + b_1 x_i ?$$

No perchè:

- la *y* ha distribuzione di Bernoulli e non Normale;
- l'ipotesi di omoschedasticità non è sicuramente verificata;
- i valori stimati di $\mathbf{E(y_i \mid x_i)}$ non necessariamente ricadono nell'intervallo [0,1];
- in molte situazioni reali si è visto che la probabilità di un evento varia in funzione di una o più variabili esplicative in modo non lineare.



logit: modello

Equazione

$$\vartheta_i = \frac{\exp b_0 + b_1 x_i}{1 + \exp(b_0 + b_1 x_i)}$$

Assunzioni

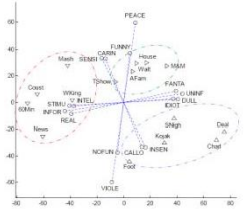
$y_i | x_i \sim \text{Be}(\vartheta_i)$, indip.

o equivalentemente

$$\text{logit}(\vartheta_i) = b_0 + b_1 x_i$$

$y_i | x_i \sim \text{Be}(\vartheta_i)$, indip.

dove $\text{logit}(\vartheta_i) = \log\left(\frac{\vartheta_i}{1 \quad \vartheta_i}\right)$ è il logaritmo dell' "odds".



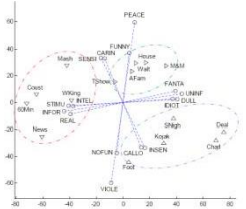
logit: odds

Odds = numero di chance favorevoli all'accadimento contro una sfavorevole.

Le odds sono un diverso modo di misurare il grado di fiducia nell'accadimento di un evento.

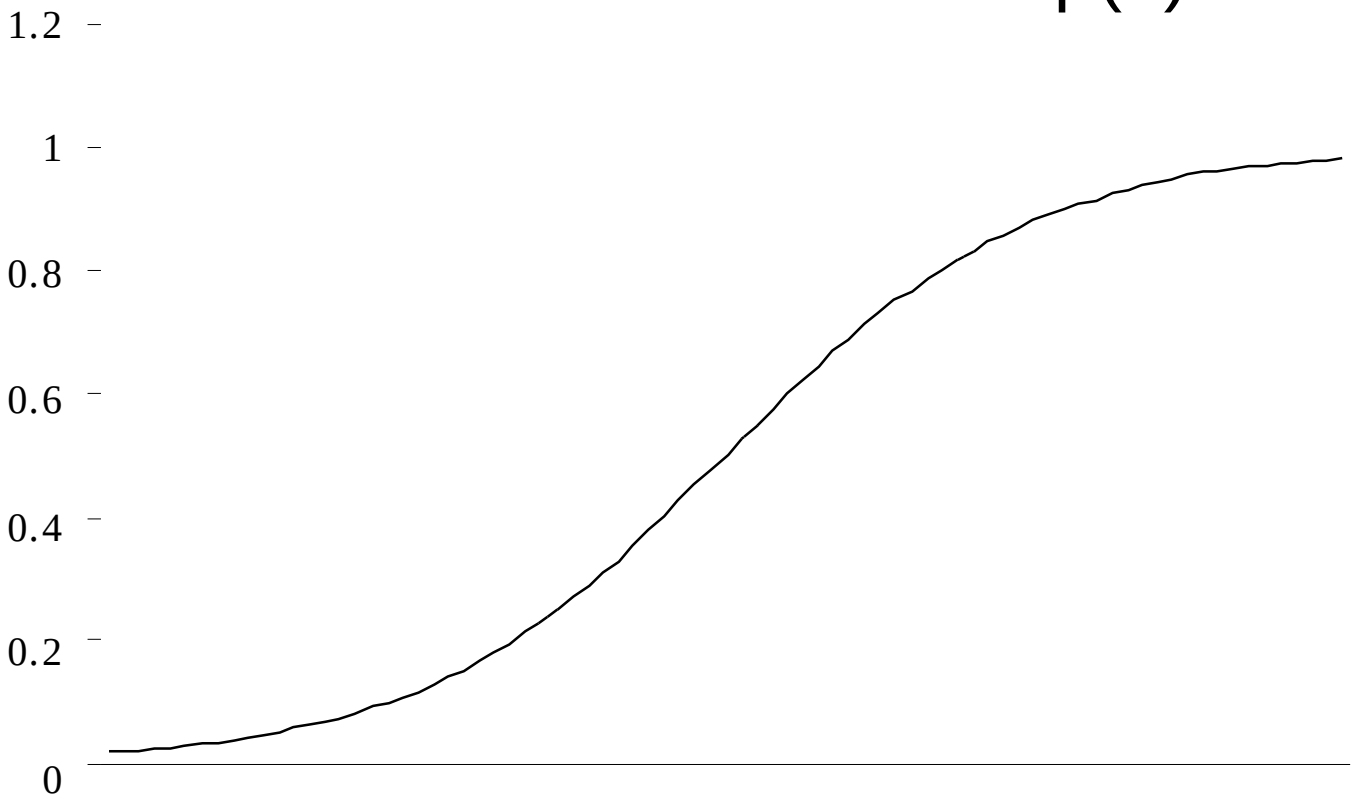
Sono così legate con le probabilità:

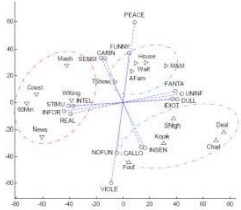
$$\text{probabilità dell'evento} = \frac{\text{odds}}{\text{odds}+1}; \qquad \text{odds} = \frac{\text{probabilità}}{1-\text{probabilità}}$$



logit: logistica

Grafico della funzione logistica $\vartheta = \dfrac{\exp(x)}{1+\exp(x)}$





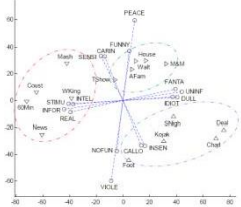
logit: interpretazione

- b_0 valore di logit(ϑ) quando **x** = **0**, b_1 incremento di logit(ϑ) se x_j aumenta di una unità.
- Importante osservare che se x_j aumenta di una unità allora l'incremento di ϑ dipende dal valore di x_j.

  consideriamo il modello $\text{logit}(\vartheta_i) = b_0 + b_1 x_i$

- **Esempio** Per studiare la relazione tra *feel* e *choice*

$$\text{logit}(\Pr(feel=1)) = \begin{cases} b_0 \text{ scelta insufficiente} \\ b_0 + b_1 \text{ scelta sufficiente} \end{cases}$$



logit: interpretazione

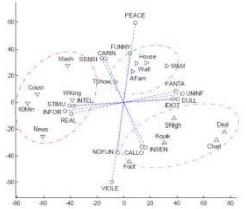
risulta

$$b_1 = \text{logit}(\vartheta_{Ssi}) - \text{logit}(\vartheta_{Sno}) = \log\left(\frac{\vartheta_{Ssi}/(1-\vartheta_{Ssi})}{\vartheta_{Sno}/(1-\vartheta_{Sno})}\right)$$

quindi

$$\exp(b_1) = \frac{\vartheta_{Ssi}/(1-\vartheta_{Ssi})}{\vartheta_{Sno}/(1-\vartheta_{Sno})} \Rightarrow \exp(b_1)\frac{\vartheta_{Sno}}{1-\vartheta_{Sno}} = \frac{\vartheta_{Ssi}}{1-\vartheta_{Ssi}}$$

In generale possiamo dedurre che se il regressore aumenta di una unità, allora l'odds aumenta $\exp(b_1)$ volte



logit: stima ML

La stima dei parametri avviene con il metodo della massima verosimiglianza. L'idea è quella di considerare il campione osservato come quello che aveva la maggiore probabilità di essere estratto.

Funzione di probabilità del campione

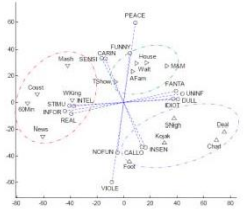
$$p(\mathbf{y};\vartheta) = \vartheta_1^{y_1}(1-\vartheta_1)^{1-y_1} \cdot \ldots \cdot \vartheta_n^{y_n}(1-\vartheta_n)^{1-y_n}$$

Funzione di verosimiglianza (Likelihood function)

$$L(b_0,b_1;\mathbf{y}) = \vartheta_1^{y_1}(1-\vartheta_1)^{1-y_1} \cdot \ldots \cdot \vartheta_n^{y_n}(1-\vartheta_n)^{1-y_n};\text{logit}(\vartheta_i) = b_0 + b_1 x_i$$

Stimatore di massima verosimiglianza

$$(\hat{b}_0,\hat{b}_1) = \text{argmax}\, L(b_0,b_1;\mathbf{y})$$



logit: stima ML

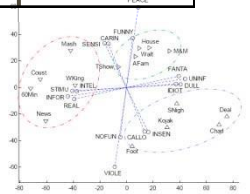
Esempio: Y = 1 non assunto dopo stage
dex = punteggio al test di entrata

Model Fit Statistics		
Criterion	Intercept Only	Intercept and Covariates
AIC	795.912	748.014
SC	800.438	757.067
-2 Log L	793.912	744.014

Testing Global Null Hypothesis: BETA=0			
Test	Chi-Square	DF	Pr > ChiSq
Likelihood Ratio	49.8977	1	<.0001
Score	47.3598	1	<.0001
Wald	44.1038	1	<.0001

Analysis of Maximum Likelihood Estimates					
Parameter	DF	Estimate	Standard Error	Wald Chi-Square	Pr > ChiSq
Intercept	1	2.9863	0.5948	25.2094	<.0001
dex	1	-0.0909	0.0137	44.1038	<.0001

Parameter Estimates and Wald Confidence Intervals			
Parameter	Estimate	95% Confidence Limits	
Intercept	2.9863	1.821	4.152
dex	-0.0909	-0.12	-0.0641



logit: test Z

- Ipotesi nulla H_0: $b_1=0$
- Statistica test

$$z_{oss} = \text{Coef.}/(\text{Std. Err.}) = \hat{b}_1 / \text{se}(\hat{b}_1)$$

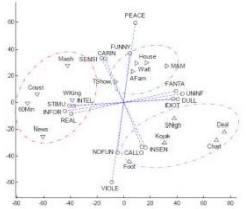
$z_{oss} \sim N(0,1)$ se H_0 vera e n suff. elevato

- Regola di rifiuto

$$| z_{oss} | > z_{\alpha/2}$$

- P-value

$$2\Pr\{Z > | z_{oss}|\}$$



logit: test di Wald

- Ipotesi nulla H_0: $b_1=0$
- Statistica test

$$w_{oss} = (z_{oss})^2$$

$$w_{oss} \sim \chi^2(1) \text{ se } H_0 \text{ vera e } n \text{ suff. elevato}$$

- Regola di rifiuto

$$W_{oss} > \chi^2_{\alpha}$$

- P-value

$$Pr\{\chi^2(1) > w_{oss}\}$$