Esercizio 1

Il preside di una scuola elementare sospetta che i suoi studenti abbiano un IQ, quoziente di intelligenza, superiore alla media italiana pari a 100. Dopo aver selezionato casualmente 64 bambini tra i suoi studenti e misurato il loro quoziente di intelligenza, il preside riscontra un valore medio di 106 e una varianza campionaria corretta pari a 256.

a) Può il preside concludere che i suoi studenti siano più intelligenti della media nazionale ad un livello di significatività α=0.01?
b) Ripetere il test assumendo una varianza campionaria corretta pari a 900.

Soluzione

a) $\bar{x}$ = 106, n=64, s^2=256, α=0.01.

La deviazione standard campionaria è pari a $s = \sqrt{256} = 16$.

Il preside è interessato alla verifica del seguente sistema di ipotesi:

H_0: μ=100 contro l'alternativa H_1:μ>100.

Il valore critico è $Z_{0.01}$=2.326 e la regione di rifiuto è pari a Z>2.326.

La statistica test è pari a $z = \frac{106-100}{\frac{16}{\sqrt{64}}} = \frac{6}{2} = 3$.

z=3>2.326 pertanto il test cade nella zona di rifiuto.

Si rifiuta l'ipotesi nulla. Il preside conclude che i suoi studenti hanno un IQ più elevato della media nazionale.

b) Se $s = \sqrt{900} = 30$ la statistica test diventa $z = \frac{106-100}{\frac{30}{\sqrt{64}}} = \frac{6}{3.75} = 1.6$.

z=1.6<2.326 pertanto la statistica test cade nella zona di accettazione. Non si rifiuta l'ipotesi nulla.

Esercizio 2

Il direttore di un ospedale, situato in un quartiere molto povero nei sobborghi di New York, sospetta che i neonati che nascono lì abbiano un peso inferiore rispetto alla media nazionale (pari a 3.2 Kg), tale da dover richiedere un intervento di prevenzione sulla malnutrizione delle donne del quartiere. Misura quindi il peso di 160 bambini scelti casualmente tra i neonati nell'ultimo anno e riscontra che il peso medio è pari a 2.9 e la varianza corretta è pari a 4.

a) Verificare se il direttore riterrà necessario un intervento di sanità pubblica contro la malnutrizione, avendo fissato il livello di significatività del test a 0.05.
b) Ripetere il test supponendo che il campione sia di 80 bambini.

Soluzione

a) $\bar{x}$ = 2.9; s^2=4; n=160; α=0.05.
   La deviazione standard campionaria è pari a $s = \sqrt{4} = 2$.
   Il direttore deve verificare il seguente sistema di ipotesi:
   H_0: μ=3.2 contro l'alternativa H_1: μ<3.2.

   Il valore critico è $-z_{0.05}$=-1.645 e la regione di rifiuto è pari a

   Z<-1.645.

   La statistica test è pari a $z = \frac{2.9-3.2}{\frac{2}{\sqrt{160}}} = -1.90$.

   z=-1.9<-1.645, pertanto la statistica test cade nella zona di rifiuto. Si rifiuta l'ipotesi nulla H_0.

b) Se la dimensione campionaria è pari a n=80 la statistica test diventa

$$z = \frac{2.9 - 3.2}{\frac{2}{\sqrt{80}}} = -1.34$$

   z=-1.34>-1.645, pertanto la statistica test cade nella zona di accettazione e pertanto non ci sono elementi per rifiutare H_0.

Esercizio 3

Il produttore di un farmaco afferma che in ogni compressa vi sono 14 milligrammi di una particolare sostanza attiva. Nell'ambito delle sue attività di controllo il ministero della sanità deve verificare ad un livello di significatività pari a 0.01 quanto dichiarato dal produttore. A tal fine analizza un campione di 121 compresse registrando un contenuto medio della sostanza attiva pari a 13.985 milligrammi e una deviazione standard campionaria pari a 0.12 milligrammi. Riportare le conclusioni del test condotto.

Soluzione

$\bar{x}$ = 13.98; s=0.12; n=121; α=0.01.

Il ministero della sanità deve verificare il seguente sistema di ipotesi:

H_0: μ=14 contro l'alternativa H_1: $\mu \neq 14$.

L'ipotesi alternativa è bidirezionale.

I valori critici sono pari a $\pm z_{0.005}$=$\pm$2.576 e la regione di rifiuto è pari a Z<-2.576 oppure Z>2.576.

La statistica test è pari a $z = \frac{13.985-14}{\frac{0.12}{\sqrt{121}}} = \frac{-0.0150}{0.0109} = -1.3761$.

z=-1.3761>-2.576 e z=-1.3761<2.576, pertanto la statistica test cade nella zona di accettazione. Non ci sono elementi per rifiutare l'ipotesi nulla H_0.

L'evidenza empirica è tale da ritenere plausibile quanto dichiarato dal produttore del farmaco in merito al contenuto medio di sostanza attiva.

Esercizio 4

In un sondaggio condotto negli Stati Uniti è stato chiesto "Saresti disposto a pagare molte più tasse per proteggere l'ambiente?". Su un campione di 1400 individui 723 individui ha risposto positivamente. Verificare al livello di significatività α=0.05 se la maggioranza dei cittadini americani è disposta a pagare molte più tasse per proteggere l'ambiente".

Soluzione

n=1400; proporzione campionaria $\bar{x} = \frac{723}{1400} = 0.5164$; α=0.05.

Bisogna sottoporre a verifica il seguente sistema d'ipotesi:

H_0: π=0.5 H_1: π>0.5

Il valore critico è pari a $z_{0.05}$=1.645 e la regione di rifiuto è pari a Z>1.645.

La statistica test è pari a $z = \frac{0.5164-0.5}{\sqrt{\frac{0.5\times 0.5}{1400}}} = \frac{0.0164}{0.0134} = 1.2239$.

z=1.2239<1.645, pertanto la statistica test cade nella zona di accettazione. Non si rifiuta l'ipotesi nulla H_0. Non c'è una evidenza empirica tale da far ritenere che la maggioranza dei cittadini americani è disposta a pagare molte più tasse per proteggere l'ambiente.

Esercizio 5

In una elezione a sindaco vi sono due candidati, Bianchi e Rossi.

a) Dato un campione casuale di 600 votanti, 336 hanno votato per Bianchi. Sei disposto a prevedere il vincitore? Perché?
b) Dato un campione casuale di 100 votanti, 56 hanno votato per Bianchi. Sei disposto a prevedere il vincitore? Perché?

Soluzione

a) Si può supporre di condurre la verifica d'ipotesi sulla proporzione π di coloro che voteranno per il candidato Bianchi nella popolazione ad un livello di significatività α=0.05.

n=600;proporzione campionaria $\bar{x} = \frac{336}{600} = 0.56$.

Bisogna sottoporre a verifica il seguente sistema d'ipotesi:

H_0: π=0.5 H_1: $\pi \neq$0.5

I valori critici sono $\pm z_{0.025}$=±1.96 e la regione di rifiuto è pari a |Z|>1.96.

Statistica test $z = \frac{0.56-0.5}{\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{600}}} = \frac{0.06}{0.0204} = 2.94$.

|z|=2.94>1.96, pertanto la statistica test cade nella zona di rifiuto. Si rifiuta l'ipotesi nulla H_0.

Il p-value del test P(|Z|>2.94)= 0.00164×2=0.00328 è molto piccolo. C'è una forte evidenza contro H_0 ovvero che il candidato Bianchi vincerà.

b) n=300;proporzione campionaria $\bar{x} = \frac{56}{100} = 0.56$

Statistica test $z = \frac{0.56-0.5}{\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{100}}} = \frac{0.06}{0.05} = 1.2$.

|z|=1.2<1.96, pertanto la statistica test cade nella zona di accettazione di H_0.

Il p-value del test P(|Z|>1.2)= 0.1151×2=0.2302 è elevato. Non c'è una forte evidenza contro H_0. La differenza tra le proporzioni campionarie tra i due candidati si può spiegare con il caso e non come indicazione di una differenza a livello di popolazione. Qualsiasi previsione risulta azzardata.

Esercizio 6

Alcuni consumatori hanno segnalato che il peso delle scatole di cereali di un determinato produttore è inferiore a quello riportato sull'etichetta, 500 grammi. Un'associazione di consumatori vuole verificare l'ipotesi nulla che il peso medio delle scatole di cereali prodotte da quel particolare produttore sia uguale a μ_0=500 contro l'ipotesi alternativa che il peso medio sia inferiore a 500. Assumendo di conoscere la varianza del peso delle scatole di cereali σ^2=2500, calcolare la probabilità di commettere un errore del II tipo considerando un valore del peso medio sotto l'ipotesi alternativa pari a μ_1=492 e α=0.05.

Soluzione

La regione di rifiuto per per α=0.05 è data da Z≤-1.645 ossia si rifiuta l'ipotesi nulla per tutti i valori della media campionaria $\bar{X}$ inferiori a $\mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 500 - 1.645\,\frac{50}{\sqrt{81}} = 500 - 9.14 = 490.86.$ Quindi, se la media campionaria è maggiore di 490.86 non si rifiuterà l'ipotesi nulla.

L'errore del secondo tipo si commette nell'accettare l'ipotesi nulla quando invece è vera l'ipotesi alternativa. Si tratta quindi di determinare la probabilità che la media campionaria sia superiore a 490.86 quando la media nella popolazione è in realtà pari a μ_1=492, ovvero

β=Pr(Accettare $H_0 \mid H_1$ è vera)= Pr($\bar{X} > 490.86 \mid \mu_1$=492).

$z = \frac{490.86-492}{\frac{50}{9}} = -0.2052.$ $\quad \beta = P(\bar{X} > 490.86|\mu_1 = 492) = P(Z > -0.2052) \cong 0.58.$