Esercizio 1

Supponiamo di estrarre un campione casuale di numerosità $n = 100$ da una popolazione normale con deviazione standard pari a 5.1.
Sapendo che la media campionaria $\bar{x}$ è pari a 21.6, costruire un intervallo di confidenza al 95% per la media μ della popolazione.

Soluzione

$$21.6 - 1.96\frac{5.1}{\sqrt{100}} \leq \mu \leq 21.6 + 1.96\frac{5.1}{\sqrt{100}}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{IC=[20.6,22.6]}$$

Esercizio 2

Sia X la variabile casuale che descrive il peso dei pacchetti di caffè di un lotto. X si distribuisce secondo una normale di parametri μ non nota e $\sigma^2 = 25$. Si consideri un campione di 100 pacchetti per cui si ottiene $\sum_{i=1}^{100} x_i = 24800$.

1. Si determini l'intervallo di confidenza per μ al livello $1 - \alpha = 0.97$.

Soluzione

1. $\bar{x} = \frac{24800}{100} = 248$

   $97\%IC = [248 - 2.17\frac{5}{10}; 248 + 2.17\frac{5}{10}] = [246.915, 249.085]$

Esercizio 3

Dato un campione casuale di 500 elementi su cui la media campionaria è risultata pari a 20 e la varianza corretta a 160, costruire costruire un intervallo di confidenza al 95% per la media della popolazione.

Soluzione

Data l'elevata numerosità campionaria, la variabile

$$\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

si distribuisce come una normale standardizzata. Quindi l'intervallo di confidenza della media della popolazione al livello di confidenza 0.95 è sarà dato da
$\bar{x} \pm 1.96\sqrt{\frac{160}{500}} = 20 \pm 1.12 = [18.88, 21.12]$.

Esercizio 4

Dato il seguente campione di 35 voli di solo andata tra Atlanta e Chicago,
99 102 105 105 104 95 100 114 108 103 94 105 101 109 103 98 96 98 104 87 101 106 103 90 107 98 101 107 105 94 111 104 87 117 101

1. fornire un intervallo di confidenza del 95% per il prezzo medio del volo, sapendo che $\bar{x} = 101.77$ e $\sum_{i=1}^{35} x_i^2 = 364032$.

Soluzione

1. $s^2 = \frac{1}{34}(364032 - 35 \cdot 101.77^2) = 45.0691$
   $95\%IC = \left[101.77 - 1.96\sqrt{\frac{45.0691}{35}}, 101.77 + 1.96\sqrt{\frac{45.0691}{35}}\right] = [99.5459, 103.9941]$

Esercizio 5

In un campione casuale composto da 400 individui, 136 hanno riscontrato l'influenza dopo aver ricevuto il vaccino. Costruire un interevallo di confidenza per la proporzione π di individui che hanno avuto l'influenza al livello $(1-\alpha) = 0.95$.

Soluzione

Possiamo stimare $\bar{x} = 136/400 = 0.34$, mentre una stima della varianza è data da $\bar{x}(1-\bar{x}) = 0.224$. Utilizzando il TLC, possiamo determinare l'intervallo di confidenza

$$\bar{x} \pm \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} z_{\alpha/2} = 0.34 \pm \sqrt{\frac{0.224}{400}} \cdot 1.96 = 0.34 \pm 0.0464 = [0.294, 0.386]$$

Esercizio 6

Viene effettuato un sondaggio per prevedere quale fra due candidati alla carica di sindaco di una città vincerà il ballottaggio. Indichiamo con A e B i due candidati. Vengono fatte 200 interviste, nelle quali all'intervistato viene chiesto di esprimere la propria preferenza; il candidato B riceve 105 preferenze.

1. Stimare la probabilità che il candidato B diventi sindaco, giustificando la scelta dello stimatore usato.

2. Calcolare l'intervallo di confidenza al 90% per la probabilità che il candidato B diventi sindaco.

Soluzione

Definiamo X="Preferenza per uno dei due candidati".

1. La probabilità che il candidato B diventi sindaco può essere stimata attraverso la frequenza campionaria

$$\bar{x} = \frac{105}{200} = 0.525.$$

2. n è sufficientemente grande da poter utilizzare il TLC; avremo quindi $0.525 \pm 1.645\sqrt{\frac{0.525 \cdot 0.475}{200}} = 0.525 \pm 1.645 \cdot 0.035 = [0.467, 0.583]$.

Esercizio 7

Una ricerca di mercato è interessata a sapere quando, e quanto spesso gli abitanti di una piccola città guardano la televisione.
Un campione di 60 abitanti è selezionato e ad ognuno è stato chiesto se e quando ha guardato la televisione in una data settimana. È risultato che:

- 25 guardano il telegiornale serale almeno due sere la settimana;
- sia X_i il tempo (in ore) passato davanti alla televisione alla settimana dell'i-esimo intervistato
  $\sum_{i=1}^{60} x_i = 840$ e $\sum_{i=1}^{60} x_i^2 = 12300$.

1. Proporre un intervallo di confidenza al 99% per μ.
2. Proporre un intervallo di confidenza al 95% per π, la proporzione di abitanti che guardano il tg serale almeno due sere la settimana.

Soluzione

1. $s^2 = \frac{12300 - 60 \cdot 14^2}{59} = 9.15$
   $99\%IC = \left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = 14 \pm 2.5758\sqrt{\frac{9.15}{60}} = 14 \pm 2.5758 \cdot 0.39 = 14 \pm 1.00 = [13.00, 15.00]$

2. $95\%IC = \left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}\right] =$
$\left[0.4167 - 1.96\sqrt{\frac{0.4167 \cdot 0.5833}{60}}, 0.4167 + 1.96\sqrt{\frac{0.4167 \cdot 0.5833}{60}}\right] = [0.2919, 0.5414]$

Esercizio 8

Il peso medio di un campione di 200 adulti è risultato pari a 75 Kg mentre la stima corretta della varianza della popolazione è risultata pari a 16.

1. Costruire l'intervallo di confidenza al 95% per la media della popolazione.
2. Cosa succede se la la stima corretta della varianza della popolazione è risultata pari a 25?
3. Cosa succede se la la stima corretta della varianza della popolazione è risultata pari a 25 e n=100?
4. Cosa succede se la la stima corretta della varianza della popolazione è risultata pari a 25, n=100 e $1-\alpha$=0.9?

Soluzione

1. Sfruttando il TLC, avremo che
   $z_{\alpha/2} = 1.96$
   $\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{200}} = 0.283$

   $$\Downarrow$$
   $$z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot 0.283 = 0.555$$

   Pertanto l'intervallo di confidenza è pari a $75 \pm 0.555 = [74.44; 75.56]$.

2. Nel caso in cui $s^2 = 25$, avremo che $\frac{5}{\sqrt{200}} = 0.354$

   $$\Downarrow$$
   $$z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot 0.354 = 0.694$$

   Pertanto l'intervallo di confidenza è pari a $75 \pm 0.694 = [74.31; 75.69]$.

3. Nel caso in cui $s^2 = 25$ e $n = 100$, avremo che $\frac{5}{\sqrt{100}} = 0.5$

$$\Downarrow$$

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot 0.5 = 0.98$$

Pertanto l'intervallo di confidenza è pari a $75 \pm 0.98 = [74.02; 75.98]$.

4. Nel caso in cui $s^2 = 25$, $n = 100$ e $1 - \alpha = 0.9$ avremo che $\frac{5}{\sqrt{100}} = 0.5$

$$\Downarrow$$

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot 0.5 = 0.823$$

Pertanto l'intervallo di confidenza è pari a $75 \pm 0.823 = [74.18; 75.82]$.

$$\Downarrow$$

La lunghezza dell'intervallo dipende da tre elementi: la dimensione campionaria n, il livello di confidenza $1 - \alpha$ e il valore della varianza della popolazione.
L'aumento della varianza della popolazione comporta un aumento dell'ampiezza dell'intervallo. Invece la diminuzione di n comporta un aumento dell'ampiezza dell'intervallo; una diminuzione del livello di confidenza (ossia un aumento di α) porta ad una diminuzione del valore di $z_{\alpha/2}$ e di conseguenza porta ad una dimunizione dell'ampiezza dell'intervallo.