Esercizio 1

Consideriamo una popolazione X, dove $X = \{3, 5, 7\}$.

1. Quali sono i possibili campioni di numerosità 2 senza reimmissione? X_1 e X_2 sono indipendenti?
2. Quali sono i possibili campioni di numerosità 2 con reimmissione? X_1 e X_2 sono indipendenti?
3. Si osserva che $\mu = 5$ e $\sigma^2 = 2.67$. Calcolare la distribuzione campionaria della media per n uguale a 1 e 2.

Soluzione

1. Prima di tutto notiamo che

X	P(X)
3	1/3
5	1/3
7	1/3

Estraendo 2 unità in blocco dalla popolazione X otteniamo 6 possibili campioni.

Campioni	Prob
(3,5)	1/6
(3,7)	1/6
(5,3)	1/6
(5,7)	1/6
(7,5)	1/6
(7,3)	1/6

Otteniamo quindi una variabile doppia.

$X_1 \setminus X_2$	3	5	7	Totale
3	0	1/6	1/6	**1/3**
5	1/6	0	1/6	**1/3**
7	1/6	1/6	0	**1/3**
Totale	**1/3**	**1/3**	**1/3**	1

Osservazioni

- (3,3) ha probabilità pari a 0, poichè estraendo le unità in blocco non le posso estrarre simultaneamente;
- X_1 e X_2 sono due variabili che presentano le stesse possibili realizzazioni e le stesse probabilità di realizzazione. X_1 e X_2 sono v.a. *somiglianti*;
- X_1 e X_2 sono due variabili aleatorie somiglianti a quella che descrive la popolazione.

X_1 e X_2 non sono indipendenti.

2. Campionamento con reimmissione. I possibili campioni sono 9.

Campioni	Prob
(3,3)	1/9
(3,5)	1/9
(3,7)	1/9
(5,3)	1/9
(5,5)	1/9
(5,7)	1/9
(7,5)	1/9
(7,3)	1/9
(7,7)	1/9

Otteniamo quindi una variabile doppia. X_1 e X_2 sono due variabili aleatorie indipendenti.

$X_1 \setminus X_2$	3	5	7	Totale
3	1/9	1/9	1/9	**1/3**
5	1/9	1/9	1/9	**1/3**
7	1/9	1/9	1/9	**1/3**
Totale	**1/3**	**1/3**	**1/3**	1

3. Calcoliamo ora la distribuzione campionaria della media per n uguale a 1 e 2. Con $n = 1$, abbiamo Quindi $E(\bar{x}) = 5$ e $Var(\bar{x}) = 83/3 - 5^2 = 2.67$.

$\bar{x}$	$P(\bar{x})$	$\bar{x} \cdot P(\bar{x})$	$\bar{x}^2 \cdot P(\bar{x})$
3	1/3	3/3	9/3
5	1/3	5/3	25/3
7	1/3	7/3	49/3
Totale	1	15/3	83/3

Con $n = 2$, abbiamo Quindi $E(\bar{x}) = 5$ e $Var(\bar{x}) = 237/9 - 5^2 = 1.33$.

$\bar{x}$	$P(\bar{x})$	$\bar{x} \cdot P(\bar{x})$	$\bar{x}^2 \cdot P(\bar{x})$
3	1/9	3/9	9/9
4	2/9	8/9	32/9
5	3/9	15/9	75/9
6	2/9	12/9	72/9
7	1/9	7/9	49/9
Totale	1	45/9	237/9

Si dimostra che in generale la media e la varianza della media campionaria sono legate ai corrispondenti valori della popolazione nel modo seguente

- $E(\bar{x}) = \mu$
- $Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Esercizio 2

Supponiamo che il tempo di attesa della metro A si distribuisca normalmente con media 10 minuti e deviazione standard 3 minuti. Qual è la probabilità che il tempo medio di attesa in una settimana sia tra 8 e 12 minuti?

Soluzione

Il tempo medio di attesa è calcolato su $n = 7$ giorni, quindi la media campionaria ha media pari a 10 minuti e deviazione standard pari a $\frac{3}{\sqrt{7}} = 1.134$. La probabilità che il tempo medio di attesa in una settimana sia tra 8 e 12 minuti è pari a
$P(8 < \bar{X} < 12) = P\left(\frac{8-10}{1.134} < Z < \frac{12-10}{1.134}\right) = P(-1.76 < Z < 1.76) = 2(0 < Z < 1.76) = 2 \cdot (\Phi(1.76) - \Phi(0)) = 2 \cdot (0.9608 - 0.5) = 0.9216$

Esercizio 3

Un ascensore ha portata massima di 1800 Kg. Il peso delle persone che usano solitamente l'ascensore si distribuisce normalmente con una media di 70 Kg ed uno scarto quadratico medio di 7 Kg. Supponendo che 25 persone entrino nell'ascensore, qual è la probabilità che il loro peso totale ecceda la capacità dell'ascensore?

Soluzione

$X_i \sim$ N(70;49) $\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{25} X_i \sim$ N(1750;1225).

$$\Downarrow$$

$P(Y > 1800) = P\left(Z > \frac{1800-1750}{35}\right) = P(Z > 1.43) = 1 - \Phi(1.43) = 0.0764$

Esercizio 4

Quando uno studente controlla la posta su Internet generalmente ci impiega un periodo di tempo X distribuito come una normale di media 8 e deviazione standard 2. Immaginate di aspettare in fila il vostro turno e avere 25 persone davanti a voi.

1. Qual è il tempo previsto di attesa?

2. Qual è la probabilità che lo studente prima di voi ci impieghi meno di 5 minuti?

3. Qual è la probabilità di dover aspettare complessivamente più di tre ore?

Soluzione

X=tempo per la visione della mail, $X \sim$ N(8,2^2).
$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{25} X_i \sim$ N($25 \cdot 8$;$25 \cdot 4$) $\Rightarrow Y \sim$ N(200;100).

1. tempo di attesa previsto: $\mu = 25 \cdot 8 = 200$
2. $P(X < 5) = P\left(Z < \frac{5-8}{2}\right) = P(Z < -1.5) = 1 - P(Z < 1.5) = 0.0668$
3. $P(Y > 180) = P\left(Z > \frac{180-200}{10}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0.9772$

Esercizio 5

Si è osservato che la lunghezza media di un componente industriale si distribuisce secondo una normale con media 12 m e deviazione standard 4 m. Qual è la probabilità che lunghezza media di 16 componenti estratti casualmente sia maggiore di 4 m?

Soluzione

X=lunghezza media dei 16 componenti industriali
Viene richiesta la probabilità che $P(\bar{X} \geq 4)$.
Sfruttando $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ~N(0;1) $\Rightarrow P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{4-12}{4/\sqrt{16}}\right) = P\left(Z \geq \frac{-8}{1}\right) = 1$

Esercizio 6

È noto che il peso medio di un pacchetto di caramelle si distribuisce secondo una normale con una media di 30 gr e varianza 225 gr.

1. In un campione di 9 pacchetti, è più probabile osservare un peso medio maggiore di 35 gr o minore di 20 gr?
2. Se invece si prendesse un campione di 25 pacchetti, la probabilità di osservare un peso maggiore di 35 gr aumenta o diminuisce? Perchè?
3. Quanti pacchetti devono essere considerati affinchè la deviazione standard della media campionaria sia 1.5?

Soluzione

1. $P(\bar{X} \geq 35) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{35-30}{15/\sqrt{9}}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$
   $P(\bar{X} \leq 20) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{20-30}{15/\sqrt{9}}\right) = P(Z \leq -2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$
   È più probabile osservare un peso medio maggiore di 35 gr che minore di 20 gr.

2. $P(\bar{X} \geq 35) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{35-30}{15/\sqrt{25}}\right) = P\left(Z \geq \frac{5}{3}\right) = 1 - \Phi(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$ La probabilità che il peso medio sia maggiore di 35 gr si riduce perchè la stima del peso medio tende sempre più a $E(\bar{X})$.

3. Viene richiesto n tale che $Var(\bar{X}) = 1.5$. Sapendo che $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
   Sapendo che $\sigma(\bar{X}) = 1.5$ e che $\sigma = 15 \Rightarrow 1.5 = \frac{15}{\sqrt{n}}$
   $\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{15}{1.5} \Rightarrow n = 100$

Esercizio 7

Si lancia una moneta non truccata 100 volte. Applicando il teorema del limite centrale calcolare:

1. la probabilità di ottenere esattamente 55 teste;
2. la probabilità di ottenere più di 40 teste;
3. la probabilità che la proporzione di teste sia compresa tra il 45% e 60%.

Soluzione

$Y = \sum_{i=1}^{100} X_i \Rightarrow Y \sim$ Bin(100;0.5) $\Rightarrow$ Y $\approx$ N(50,25)

1. $P(Y = 55) = P(54.5 \leq Y \leq 55.5) = P\left(\frac{54.5-50}{5} \leq Z \leq \frac{55.5-50}{5}\right) = P(0.9 \leq Z \leq 1.1) = 0.0484$
2. $P(Y > 40) = P\left(\frac{40-50}{5}\right) = P(Z > -2) = 0.9772$
3. $P(45 \leq Y \leq 60) = P\left(\frac{45-50}{5} \leq Z \leq \frac{60-50}{5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 2) = 0.8186$

Esercizio 8

Si supponga che il 40% degli intervistati in un sondaggio si dica disposto a provare una nuova marca di caffè. Applicando il Teorema del Limite Centrale si calcoli:

1. la probabilità che, su un campione di 100 intervistati, più di 45 si dicano disposti a provare la nuova marca di caffè;

2. la numerosità campionaria necessaria affinchè la probabilità che più del 45% degli intervistati si dica disposto al passaggio di marca sia inferiore allo 0.05.

Soluzione

1. Sia X=passaggio del singolo consumatore.
   $\Rightarrow$ X $\sim$ Be(0.4) $\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim$ Bin(100;0.4); per il Teorema del Limite Centrale $Y \sim$ N(40;24).
   $P(Y > 45) = P\left(Z > \frac{45-40}{\sqrt{24}}\right) = P(Z > 1.02) = 0.1539$

2. Sia n la numerosità campionaria
   $\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ Bin(n;0.4). Per il Teorema del Limite Centrale $Y \sim N(0.4n; 0.24n)$.
   Viene richiesto n tale che $P(Y \geq 0.45n) \leq 0.05$.
   $P(Y \geq 0.45n) = P\left(Z \geq \frac{0.45n-0.4n}{\sqrt{0.24n}}\right) = P(Z \geq 0.102\sqrt{n}) \leq 0.05$ Se $n \geq 0 \Rightarrow 0.102\sqrt{n} \geq 0$
   $\Rightarrow P(Z \geq 0.102\sqrt{n}) = 1 - \Phi(0.102\sqrt{n}) \leq 0.05 \Rightarrow \Phi(0.102\sqrt{n}) \geq 0.95$.
   Con l'ausilio delle tavole si conclude che
   $0.102\sqrt{n} \geq 1.65 \Rightarrow n \geq \left(\frac{1.65}{0.102}\right)^2 \Rightarrow n \geq 262$.
   Affinchè la probabilità che più del 45% degli intervistati si dica disposto al passaggio di marca sia inferiore allo 0.05 occorre un campione di almeno 262 persone.

Esercizio 9

In un processo di controllo industriale si assume che il peso di una confezione di pasta sia una variabile aleatoria distribuita secondo una normale con media 500 e varianza 25 gr. Se il peso di una confezione è inferiore a 490 gr o superiore a 510, allora la confezione è da considerarsi difettosa. Si determini, dato un campione di 100 scatole, la probabilità che

1. al più 10 siano rifiutate

2. almeno 95 siano accettate.

Soluzione

Peso della singola confezione: $X_i \sim$ N(500,25)
$\Rightarrow P(490 \leq X_i \leq 510) = 0.9544$ è la probabilità che la singola confezione non sia difettosa e 1-0.9544=0.0456 è la probabilità che la confezione sia difettosa.

1. $W_i \sim$ Be(0.0456) e $Y = \sum_{i=1}^{100} = W_i$; per il Teorema del Limite Centrale $Y \sim$ N(4.56;4.35)
   $\Rightarrow P(Y \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-4.56}{\sqrt{4.35}}\right) = \Phi(2.61) = 0.9955$

2. $U_i \sim$ Be(0.9544) e $K = \sum_{i=1}^{100} U_i$; per il Teorema del Limite Centrale $W \sim$ N(95.44;4.35)
   $\Rightarrow P(K \geq 95) = P\left(Z \geq \frac{95-95.44}{\sqrt{4.35}}\right) = \Phi(-0.21) = \Phi(0.21) = 0.5832$

Esercizio 10

Il consumo giornaliero di gas metano si distribuisce secondo una normale con media 8.2 m^3 e varianza pari a 7.5 m^3. Sapendo che il gas viene fatturato ad un prezzo di 0.7$ al m^3 e che il periodo invernale è di 151 giorni, calcolare:

1. la probabilità che una famiglia a caso spenda durante tutto l'inverno meno di 850$

2. la probabilità che due famiglie prese a caso spendano più di 900 $.

Soluzione

$X_i \sim$ N(8.2;7.5) è il consumo giornaliero di gas.
$Y = \sum_{i=1}^{151} X_i \sim$ N($151 \cdot 8.2$;$151 \cdot 7.5$) è il consumo complessivo durante tutto l'inverno.

1. 850$ di spesa corrispondono a $\frac{850}{0.7} = 1214.29\ m^3$ di gas
   $P\left(Y \leq \frac{1214.29-1238.2}{\sqrt{1132.5}}\right) = P(Z \leq -0.71) = 1 - 0.7611 = 0.2389$

2. 900$ di spesa corrispondono a $\frac{900}{0.7} = 1285.71\ m^3$ di gas.
   La probabilità che una singola famiglia spenda più di 900$ è $P\left(Y \leq \frac{1285.71-1238.2}{\sqrt{1132.5}}\right) = P(Z \leq 1.41) = 1 - 0.9207 = 0.0793$
   Assumendo che i consumi di diverse famiglie siano indipendenti, la probabilità che due famiglie spendano più di 900$ è $\left(P\left(Y \leq \frac{1285.71-1238.2}{\sqrt{1132.5}}\right)\right)^2 = 0.00628$.