Esercizio 1

All'ultimo appello dell'esame di statistica, la media dei voti è stata 25 e lo scarto quadratico medio 3.5. Determinare i valori standard dei voti

1. 18
2. 25
3. 30
4. Se il voto standardizzato è -1, quanto è stato preso in 30esimi? E se il voto standardizzateo fosse stato +1?

Soluzione

1. $z = \dfrac{x - \bar{x}}{\sigma} = -2$
2. $z = 0$
3. $z = 1.1428$
4. $x = 25 + 3.5 \cdot (-1) = 21.5$ e $x = 28.5$

Esercizio 2

Sia Z la v.c. normale standardizzata. Calcolare:

1. P(-2 < Z < -1)
2. P(Z > 1.52)
3. P(-2 < Z < 0.89)
4. P(0 < Z < 2.15)

Soluzione

1. P(-2 < Z < -1)=Φ(-1)-Φ(-2)=0.1587-0.0228=0.1359
   $\Phi(-1)$=1-$\Phi(1)$=1-0.8413=0.1587
   $\Phi(-2)$=1-$\Phi(2)$=1-0.9772=0.0228

2. P(Z > 1.52)=1-Φ(1.52)=1-0.9357=0.0643

3. P(-2 < Z < 0.89)=Φ(0.89)-Φ(-2)=0.8133-0.0228=0.7905

4. P(0 < Z < 2.15)=Φ(2.15)-Φ(0)=0.9842-0.5=0.4842

Esercizio 3

Un'azienda produttrice di bulloni ha osservato che il diametro medio è di 0.502 cm con uno scarto quadratico medio di 0.005 cm. I bulloni con diametro maggiore di 0.508 e minore di 0.496 sono da considerarsi difettosi. Assumendo che i diametri dei bulloni prodotti si distribuiscano secondo una normale, calcolare la percentuale di bulloni difettosi.

Soluzione

$P(X \leq 0.496) + P(X \geq 0.508) = P\left(X \leq \frac{0.496-0.502}{0.005}\right) + P\left(X \geq \frac{0.508-0.502}{0.005}\right) =$
$P(z \leq -1.2) + P(z \geq 1.2) = 2(1-\Phi(1.2)) = 0.2302.$
La percentuale dei bulloni difettosi è 23.02%.

Esercizio 4

Si è osservato che l'altezza degli studenti del corso di statistica si distribuisce secondo una normale con media 175 cm e deviazione standard 8.5 cm. Qual è la probabilità che uno studente del nostro corso sia alto tra 1.70 e 1.85 metri?

Soluzione

$P(170 \leq X \leq 185) = P\left(\frac{170-175}{8.5} \leq X \leq \frac{185-175}{8.5}\right) = \Phi(1.18) - (1-\Phi(0.59)) =$
0.6034
C'è una probabilità del 60.34% di osservare uno studente alto tra 1.70 e 1.85 metri.

Esercizio 5

Un prodotto si ottiene dall'assemblaggio di tre componenti, le cui lunghezze si distribuiscono come segue

$$X_1 \sim N(2, 0.01)$$
$$X_2 \sim N(4, 0.02)$$
$$X_3 \sim N(3, 0.02).$$

Sapendo che le lunghezze dei tre componenti sono indipendenti tra di loro, si determini la probabilità che la lunghezza del singolo pezzo soddisfi gli standard qualitativi prefissati, che prevedono una lunghezza compresa tra (8.75;9.25)?

Soluzione

Sia $Y = X_1 + X_2 + X_3$, allora la lunghezza del prodotto ha una distribuzione normale con media 9 e varianza 0.05

$$Y \sim N(2+4+3; 0.01+0.02+0.02) \Rightarrow Y \sim N(9; 0.05).$$
$$\Downarrow$$
$$P(8.75 \leq Y \leq 9.25) = P\left(\frac{8.75-9}{0.2236} \leq Z \leq \frac{9.25-9}{0.2236}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$P(-1.12 \leq Z \leq 1.12) = 2 \cdot P(0 < Z < 1.12) = 2 \cdot (\Phi(1.12) - \Phi(0)) =$$
$$2 \cdot (0.8686 - 0.5) = 0.7372.$$

Esercizio 6

Siano date 2 variabili aleatorie indipendenti distribuite secondo una Normale,

$$X_1 \sim N(0, 25)$$
$$X_2 \sim N(0, 36).$$

Calcolare la probabilità che $P(Y < 3.6)$ con $Y = X_1 + 3X_2$.

Soluzione

$$P(Y < 3.6) = P\left(Z < \frac{3.6-0}{\sqrt{349}}\right) = P(Z < 0.19) = 0.5753.$$

Esercizio 7

Siano date 4 variabili aleatorie indipendenti, tutte distribuite secondo una normale.

- $X_1 \sim N(25, 25)$
- $X_2 \sim N(25, 100)$
- $X_3 \sim N(49, 49)$
- $X_4 \sim N(49, 100)$

Come si distribuisce la variabile aleatoria $Y = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4$?

Soluzione

$E(Y) = 25 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 49 + 4 \cdot 49 = 418$
$Var(Y) = 25 + 4 \cdot 100 + 9 \cdot 49 + 16 \cdot 100 = 2466$

$$\Downarrow$$
$$Y \sim N(418, 2466)$$

Esercizio 8

Per raggiungere Termini da Tor Vergata, è necessario prendere la metropolitana per 15 fermate e un autobus per 6 fermate. Il tempo di attesa della metropolitana è distribuito come una Normale con valore atteso 5 minuti e deviazione standard 1 minuto, mentre quello di attesa per l'autobus numero 20 ha media 6 minuti e deviazione standard 2 minuti. Anche i tempi di percorrenza sono distribuiti normalmente: quello in metropolitana con media 30 minuti e deviazione standard 10 minuti; mentre, quello dell'autobus ha media 15 minuti e deviazione standard 3 minuti. Qual è la probabilità di impiegare più di un'ora per raggiungere Tor Vergata? E di metterci meno di 45 minuti?

Soluzione

X_1= tempo attesa metro
X_2= percorso metro
X_3= tempo attesa autobus 20
X_4= percorso autobus 20
$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$

$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 5 + 30 + 6 + 15 = 56$
$Var(Y) = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) + Var(X_4) = 1 + 100 + 4 + 9 = 114$
$P(Y \geq 60) = P\left(z \geq \frac{60-56}{\sqrt{114}}\right) P(Z \geq 0.37) = 0.3556$
$P(Y \leq 46) = P\left(z \leq \frac{46-56}{\sqrt{114}}\right) = P(Z \leq -0.94) = 1 - 0.8264 = 0.1736$

Esercizio 9

Si analizza un processo produttivo in base al contenuto medio di zucchero. Si osserva che il 4.5% dei prodotti viene scartato perché ha un contenuto di zucchero inferiore a 35 grammi: mentre il 7% viene scartato perchè presentano un contenuto di zucchero superiore a 50 grammi. Ammettendo che il contenuto di zucchero abbia una distribuzione normale, qualè il modello normale che meglio rappresenta l'intero processo produttivo.

Soluzione

P(X<35)=0.045 e P(X>50)=0.07.
Dalle tavole della normale standard dobbiamo trovare le z tali che: $P(Z < z_1) = 0.045$ e $P(Z > z_2) = 0.07$
$\Phi(z_1) = 0.045$ da cui $z_1 = -1.7$ in quanto $\Phi(1.7) \approx (1 - 0.045)$.
$\Phi(z_2) = 0.07$ da cui $z_2 = 1.475$ in quanto $\Phi(1.475) \approx 0.93$.

Questi valori permettono di costruire un sistema di due equazioni in due incognite come segue:

$$-1.7 = \frac{(35-\mu)}{\sigma}$$

$$1.475 = \frac{(50-\mu)}{\sigma}$$

$\mu = 35 + 1.7\sigma$
$1.475 = \frac{(50-35-1.7\sigma)}{\sigma} \Rightarrow (1.475 + 1.7)\sigma = 15$
$\sigma = \frac{15}{3.175} = 4.72$
$\mu = 35 + 1.7 \cdot 4.72 = 43.02$
Quindi $\mu = 43.02$ e $\sigma = 4.72$.