Esercizio 1

Determinare la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione della v.c. discreta X = numero di croci in 3 lanci di una moneta. Calcolare F(-1), F(1.5), F(300).

Soluzione

Risultati	X	P(X)
TTT	0	1/8
TTC	1	1/8
TCT	1	1/8
CTT	1	1/8
TCC	2	1/8
CTC	2	1/8
CCT	2	1/8
CCC	3	1/8

Quindi

X	P(X)	F(X)
0	1/8	1/8
1	3/8	4/8
2	3/8	7/8
3	1/8	1

$$\Downarrow$$

$$F(-1) = 0 \quad F(1.5) = 4/8 \quad F(300) = 1$$

Esercizio 2

In un'azienda 10 dipendenti hanno registrato una sola ora di lavoro straordinario, 15 dipendenti "2" ore e 20 dipendenti "3" ore. Si selezionano a sorte dal database, senza essere reinseriti, i nomi di due dipendenti. Sia X il numero aleatorio="ammontare complessivo delle ore di lavoro straordinario".

- Scrivere l'espressione analitica della funzione di probabilità di X.
- Determinare la funzione di ripartizione di X e rappresentarla graficamente.
- Calcolare il valore atteso di X.
- Calcolare la varianza di X.

Soluzione

Ω	**X**	$P(X)$
1,1	2	$10 \cdot 9/(45 \cdot 44) = 0.045$
1,2	3	$10 \cdot 15/(45 \cdot 44) = 0.076$
1,3	4	$10 \cdot 20/(45 \cdot 44) = 0.101$
2,1	3	$10 \cdot 15/(45 \cdot 44) = 0.076$
2,2	4	$15 \cdot 14/(45 \cdot 44) = 0.106$
2,3	5	$15 \cdot 20/(45 \cdot 44) = 0.152$
3,1	4	$10 \cdot 20/(45 \cdot 44) = 0.101$
3,2	5	$15 \cdot 20/(45 \cdot 44) = 0.152$
3,3	6	$20 \cdot 19/(45 \cdot 44) = 0.192$

X	$P(X = x)$	$F(X \leq x)$	$x_i \cdot P(x_i)$	$x_i^2 \cdot P(x_i)$
x=2	0.045	0.045	0.091	0.182
x=3	0.152	0.197	0.455	1.364
x=4	0.308	0.505	1.232	4.929
x=5	0.303	0.808	1.515	7.576
x=6	0.192	1	1.152	6.909
Totale	**1**		**4.445**	**20.960**

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 20.96 - (4.445)^2 = 1.207$$

Esercizio 3

Sia X un numero aleatorio discreto con distribuzione uniforme sull'insieme $\Omega = \{-4, -2, 0, 2, 5\}$. Ricavare la funzione di probabilità di:

1. Y=4+2X.
2. Verificare che $E(Y) = a + b(X)$ e $Var(Y) = b^2 \cdot Var(X)$.

Soluzione

1.

Y	$P(Y=y)$
-4	1/5
0	1/5
4	1/5
8	1/5
14	1/5

2.
- $E(X) = \dfrac{1}{5} \Rightarrow E(Y) = 4 + 2 \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{22}{5}$
  $E(Y) = -4\frac{1}{5} + 0 + 4\dfrac{1}{5} + \dfrac{8}{5} + \dfrac{14}{5} = \dfrac{22}{5}$
- $Var(X) = \frac{16}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + 5 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 9.76 \Rightarrow Var(Y) = 2^2 \cdot 9.76 = 39.04$
  $Var(Y) = \frac{16}{5} + \frac{16}{5} + \frac{64}{5} + \frac{196}{5} - \left(\frac{22}{5}\right)^2 = 58.4 - 19.36 = 39.04$

Esercizio 4

Un giocatore d'azzardo vince 20\$se la carta estratta dal mazzo è di cuori e 40\$se è di quadri; ne perde 30\$se è di fiori e non vince nè perde se esce picche. Determinare il valore atteso della v.a. vincita X.

Soluzione

X	$P(X=x)$
20	1/4
40	1/4
-30	1/4
0	1/4

$$E(X) = 20 \cdot 0.25 + 40 \cdot 0.25 - 30 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.25 = 7.5$$

Esercizio 5

Un mazzo di 4 chiavi contiene una sola chiave adatta ad aprire la porta. Provando a caso una dopo l'altra occorre fare un certo numero di tentativi (v.a. X). Determinare la varianza di X.

Soluzione

Definiamo

E_i="la chiave che apre la porta è individauta all'i-esimo tentativo".

Allora, avremo che
$P(X=1) = P(E_1) = \frac{1}{4}$
$P(X=2) = P(E_2 \cap \bar{E}_1) = P(\bar{E}_1)P(E_2 \mid \bar{E}_1) = \frac{3}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$
$P(X=3) = P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3) = P(\bar{E}_1)P(\bar{E}_2 \mid \bar{E}_1)P(E_3 \mid \bar{E}_2 \cap \bar{E}_1) = \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
$P(X=4) = P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3 \cap E_4) = P(\bar{E}_1)P(\bar{E}_2 \mid \bar{E}_1)P(\bar{E}_3 \mid \bar{E}_2 \cap \bar{E}_1)P(E_4 \mid \bar{E}_3 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_1) = \frac{1}{4}$.

$$\Downarrow$$

$$E(X) = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{5}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

$$Var(X) = \frac{15}{2} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$$

Esercizio 6

Si consideri il lancio di tre monete. Si definiscano due variabili aleatorie:
X="numero di realizzazioni dell'evento testa"
Y="numero di cambi nella sequenza", ovvero il numero di volte in cui si passa da testa a croce e viceversa.

1. Trovare la funzione di probabilità $P(X;Y)$
2. Quali sono le distribuzioni di probabilità marginali della X e della Y?
3. Trovare la funzione di ripartizione $P(X \leq x; Y \leq y)$.
4. Qual è la probabilità di osservare fino a 2 realizzazioni di X e 1 di Y?$P(X \leq 2; Y \leq 1)$.
5. Trovare la funzione di probabilità condizionata di $X \mid Y = 0$ e quella di $Y \mid X = 2$.
6. Quanto è $E(X \mid Y = 2)$? E $E(Y \mid X = 3)$?
7. Calcolare $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$, $E(Y^2)$, $E(XY)$.
8. Calcolare σ_x e σ_y.
9. Calcolare il coefficiente di correlazione lineare ρ_{XY}.
10. Stabilire se X e Y sono indipendenti.
11. Dato $Z = 2X - Y$, determinare $E(Z)$ e $Var(Z)$.

Soluzione

Prima di tutto identifichiamo Ω e le variabili aleatorie X e Y.

Ω	X	Y
TTT	3	0
TCC	1	1
CTC	1	2
CCT	1	1
CTT	2	1
TCT	2	2
TTC	2	1
CCC	0	0

1. La funzione di probabilità congiunta $P(X;Y)$ è riportata nella seguente tabella

X	**Y**		
	0	**1**	**2**
0	1/8	0	0
1	0	2/8	1/8
2	0	2/8	1/8
3	1/8	0	0

2. Probabilità marginali della X e della Y

X	**Y**			
	0	**1**	**2**	**Totale**
0	1/8	0	0	**1/8**
1	0	2/8	1/8	**3/8**
2	0	2/8	1/8	**3/8**
3	1/8	0	0	**1/8**
Totale	**2/8**	**4/8**	**2/8**	**1**

3. Funzione di ripartizione $P(X \leq x; Y \leq y)$

X	Y		
	0	**1**	**2**
0	1/8	1/8	1/8
1	1/8	3/8	4/8
2	1/8	5/8	7/8
3	2/8	6/8	1

4. $P(X \leq 2; Y \leq 1) = \frac{5}{8}$

5. Funzione di probabilità condizionata di $X \mid Y = 0$

X	Y=0
0	1/2
1	0
2	0
3	1/2
Totale	1

Funzione di probabilità condizionata di $Y \mid X = 2$

Y	X=2
0	0
1	2/3
2	1/3
Totale	1

6. $E(X \mid Y = 2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
   $E(Y \mid X = 3) = 0$

7. Calcolare $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$, $E(Y^2)$, $E(XY)$.

   - $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$

- $E(Y) = 0 \cdot \frac{2}{8} + 1 \cdot \frac{4}{8} + 2 \cdot \frac{2}{8} = 1$
- $E(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = 3$
- $E(Y^2) = 0 \cdot \frac{2}{8} + 1 \cdot \frac{4}{8} + 4 \cdot \frac{2}{8} = \frac{3}{2}$
- $E(XY) = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{4}{8} + \frac{4}{8} = \frac{3}{2}$

8. $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0.8660$

9. $Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.7071$

10. $COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot 1 = 0 \Rightarrow \rho_{XY} = 0$

11. Per stabilire se X e Y sono indipendenti calcoliamo le frequenze teoriche di indipendenza.

X	**Y**			
	0	**1**	**2**	**Totale**
0	1/32	1/16	1/32	**1/8**
1	3/32	3/16	3/32	**3/8**
2	3/32	3/16	3/32	**3/8**
3	1/32	1/16	1/32	**1/8**
Totale	**2/8**	**4/8**	**2/8**	**1**

Le frequenze congiunte osservate differiscono da quelle teoriche di indipendenza, quindi X ed Y non sono indipendenti.

12. Determiniamo $E(Z)$ e $Var(Z)$ come segue,
$E(Z) = 2E(X) - E(Y) = 2 \cdot \frac{3}{2} - 1 = 2$
$Var(Z) = 4Var(X) + Var(Y) - 4Cov(X,Y) = 4 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{7}{2} = 3.5$

Esercizio 7

Negli anni si è osservato che la probabilità di laurearsi di uno studente iscritto alla Facoltà di Economia è pari a 0.35. All'inizio di un anno accademico vengono estratti a sorte (con reinserimento) 10 numeri di matricola. Determinare la probabilità che, dei 10 studenti così selezionati, se ne laureino:

1. nessuno
2. due
3. almeno uno

Soluzione

1. $P(X=0) = \binom{10}{0}(0.35)^0(0.65)^{10} = 0.0135$
2. $P(X=2) = \binom{10}{2}(0.35)^2(0.65)^8 = 0.1757$
3. $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 0.9865$

Esercizio 8

Un recente studio, mostra che il 75% delle aziende start-up avrà un bilancio positivo entro 3 anni dall'apertura dell'attività. Vengono intervistate 5 aziende costituite 3 anni prima.

1. Qual è la probabilità che tutte e 5 le aziende abbiano un bilancio positivo?
2. Qual è la probabilità che più di tre abbiano un bilancio positivo?
3. Qual è la probabilità che meno di 2 di esse abbia un bilancio positivo?
4. Calcolare il valore atteso e la deviazione standard della variabile X.

Soluzione

1. $P(X=5) = \binom{5}{5}(0.75)^5(0.25)^0 = 0.2373$
2. $P(X>3) = P(X=5) + P(X=4) = 0.6328$

3. $P(X < 2) = 0.0156$
4. $E(X) = 5 \cdot 0.75 = 3.75$
5. $Var(X) = 5 \cdot 0.75 \cdot 0.25 = 0.9375 \Rightarrow \sigma = 0.9682$