Esercizio 1

Descrivere lo spazio campionario degli eventi elementari, Ω, connesso ai seguenti esperimenti e calcolare la probabilità di ottenere come risultato ciascun evento elementare.

1. Si lanciano contemporaneamente una moneta e un dado a 6 facce.
2. Si lanciano tre monete.
3. Qual è la probabilità di ottenere come risultato almeno 2 croci?

Soluzione

1. Sia T il risultato testa, C il risultato croce e $1,\dots,6$ le 6 facce del dado. Lo spazio campionario degli eventi elementari è dato da:

   $$\Omega = \{T1, T2, T3, T4, T5, T6, C1, C2, C3, C4, C5, C6\}.$$

   La probabilità di ciascun evento elementare E è pari a

   $$P(E) = \frac{1}{12}.$$

2. Sia T il risultato testa, C il risultato croce. Lo spazio campionario degli eventi elementari è dato da:

   $$\Omega = \{TTT, TCT, TCC, TTC, CTT, CTC, CCT, CCC\}.$$

   La probabilità di ottenere almeno 2 croci è pari a

   $$P(C \geq 2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2

In una camera di un reparto maternità due donne stanno per partorire. Si assuma che ogni neonato abbia uguale probabilità di nascere maschio (M) o femmina (F). Si considerino i due eventi:

A="Nascerà al più una femmina"
B="I due neonati avranno sesso diverso".

1. Definire lo spazio degli eventi Ω;
2. Indicare A, $\bar{A}$, B e $\bar{B}$;
3. Calcolare la probabilità dell'evento A e la probabilità dell'evento B;
4. A e B sono incompatibili?
5. A e B sono due eventi indipendenti?

Soluzione

1. Lo spazio campionario è dato da
$$\Omega = \{(M,M),(M,F),(F,M),(F,F)\}.$$
2. Gli eventi A, $\bar{A}$, B e $\bar{B}$ sono i seguenti:
$A = \{(M,M),(M,F),(F,M)\}$
$\bar{A} = \{(F,F)\}$
$B = \{(M,F),(F,M)\}$
$\bar{B} = \{(M,M),(F,F)\}$.
3. Le probabità degli eventi A e B saranno pari a
$$P(A) = \frac{3}{4} = 0.75 \text{ e } P(B) = \frac{2}{4},$$
rispettivamente.
4. Dato che $A \cap B = \{(M,F);(F,M)\}$ e quindi $A \cap B \neq \varnothing$, allora gli eventi A e B non sono incompatibili.
5. Dato che $P(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ e $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ e quindi $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ allora gli eventi A e B non sono indipendenti.

Esercizio 3

Siano A e B due eventi dello spazio campionario Ω.

1. Si supponga che $P(A) = 0.7$ e $P(B) = 0.4$. A e B possono essere incompatibili?
2. Si supponga che $P(A) = 1/3$ e $P(\bar{B}) = 1/4$. A e B possono essere incompatibili?
3. Si supponga che $P(\bar{A}) = 1/2$ e $P(B) = 1/5$. A e B possono essere incompatibili?

Soluzione

1. Se A e B fossero incompatibili, allora

   $$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B) = 0.$$

   Quindi

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0 = 1.1 > 1$$
   $$\Rightarrow \text{A e B non possono essere incompatibili.}$$

2. Sapendo che $P(\bar{B}) = 1/4$, allora

   $$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4+9}{12} = \frac{13}{12} > 1$$
   $$\Rightarrow \text{A e B non possono essere incompatibili.}$$

3. Sapendo che $P(\bar{A}) = P(A) = \frac{1}{2}$, allora

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - 0 = \frac{5+2}{10} = \frac{7}{10} < 1$$
   $$\Rightarrow \text{A e B possono essere incompatibili.}$$

Esercizio 4

Si lanciano due dadi non truccati. Definiamo i seguenti eventi:

A="la somma dei dati dà 10"
B="il primo dado dà 6".

1. I due eventi sono indipendenti?
2. I due eventi sono incompatibili?

Soluzione

1. Controlliamo se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$P(A \cap B) = P(\{6,4\}) = \frac{1}{36}$$
$$P(A) = P(\{4,6\} \cup \{6,4\} \cup \{5,5\}) = \frac{3}{36}$$
$$P(B) = \frac{1}{6}$$

$$\Downarrow$$

$$P(A)P(B) = 3/36 \cdot 1/6 = 0.014 \neq \frac{1}{36}.$$

In alternativa, possiamo verificare che $P(A \mid B) \neq P(A)$.
Infatti, $P(A \mid B) = \frac{1}{6} \neq \frac{3}{36}$.

2. $(A \cap B) = (6,4) \neq \varnothing$, pertanto gli eventi sono compatibili.

Esercizio 5

Si calcoli $P(A \mid B)$ se

1. $P(A \cap B) = 0$
2. $A \subset B$
3. $B \subset A$

Soluzione

1. se $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \mid B) = \dfrac{0}{P(B)} = 0$

2. se $A \subset B \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \Rightarrow P(A \mid B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$

3. se $B \subset A \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \Rightarrow P(A \mid B) = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1.$

Esercizio 6

Posto che P(A)=0.5 e che $P(A \cup B) = 0.7$ determinare $P(B)$ se

1. A e B sono indipendenti;

2. A e B sono incompatibili;

3. se $P(A \mid B) = 0.2$.

Soluzione

1. Dato che A e B sono due eventi indipendenti, allora

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Quindi

$$\begin{gathered} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \\ P(A) + P(B)(1 - P(A)) \\ \Rightarrow 0.7 = 0.5 + P(B) - 0.5(B) \\ P(B)(1 - 0.5) = \frac{0.2}{1 - 0.5} = 0.4 \end{gathered}$$

2. Dato che A e B sono due eventi incompatibili, allora

$$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0.$$

Quindi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$\Rightarrow P(B) = 0.7 - 0.5 - 0 = 0.2.$$

3. Sapendo che $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \mid B) \cdot P(B)$$
$$\Downarrow$$
$$0.7 = 0.5 + P(B) - 0.2 \cdot P(B)$$
$$P(B)(1 - 0.2) = 0.2$$
$$P(B) = \frac{0.2}{0.8} = 0.25.$$

Esercizio 7

Si supponga che in un'urna vi siano 4 palline bianche, 3 rosse e 3 nere. Calcolare la probabilità di ottenere due palline bianche

1. nel caso in cui l'estrazione avvenga con reimmissione;
2. nel caso in cui l'estrazione avvenga senza reimmissione.

Soluzione

1. I due eventi B_1 e B_2 sono indipendenti

$$\Rightarrow P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16.$$

2. I due eventi B_1 e B_2 non sono indipendenti

$$\Rightarrow P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = 0.133.$$